

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**

DEPTO. DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA



**TRABAJO DE FIN DE GRADO**

Control de ecuaciones diferenciales estocásticas

Control of stochastic differential equations

Director: Jesús Ildefonso Díaz Díaz

Codirector: David Gómez Castro

**Jaime Aguilera Díaz**

Doble Grado en Matemáticas y Física

Curso académico 2019-2020

Convocatoria Julio

---

## Resumen:

El objetivo de este trabajo es presentar de forma autocontenida el Filtro de Kalman-Bucy (FKB), que permite identificar la mejor aproximación del estado de un sistema dinámico estocástico lineal mediante una observación parcial, en presencia de perturbaciones aleatorias. Primero, se abordan dos problemas de control determinista que guardan relación con el FKB, a saber, el Problema de Seguimiento y el Filtro de Kalman Determinista. Después, y debido a la naturaleza estocástica del FKB, se realiza una formalización de las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, que comprende el estudio del Movimiento Browniano, la Integral y el Lema de Itô, y el Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones, entre otros conceptos. Por último, se define y se caracteriza el Estimador de Kalman-Bucy, consiguiendo la mejor aproximación en el sentido de *mínimos cuadrados* (i.e. de *mínima varianza*), y se estudia y se simula un ejemplo de aplicación para ilustrar su funcionamiento.

## Abstract:

The aim of this work is to present the Kalman-Bucy Filter (KBF) in a self-contained way, which allows to identify the best approximation of the state of a linear stochastic dynamic system from a partial observation, in the presence of random disturbances. First, two deterministic control problems that are related to the KBF, namely, the Tracking Problem and the Deterministic Kalman Filter, are studied. Later, and due to the stochastic nature of the KBF, we do a formalization of the Stochastic Differential Equations, which includes the study of the Brownian Motion, the Itô's Integral and Lemma, and the Existence and Uniqueness of Solutions Theorem, among other concepts. Finally, the Kalman-Bucy Estimator is defined and characterized, giving the best approximation in the *minimum square* sense (i.e. *minimal variance*), and an application example is studied and simulated to illustrate its functioning.

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>I Nociones de control determinista</b>	<b>6</b>
1. Control óptimo determinista	6
1.1. Controlabilidad y Observabilidad . . . . .	6
1.2. Problema de seguimiento . . . . .	8
1.3. Filtro de Kalman determinista . . . . .	11
<b>II Teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas</b>	<b>14</b>
2. Movimiento browniano	14
2.1. Motivación . . . . .	14
2.2. Definición y propiedades elementales . . . . .	14
2.3. Construcción y existencia del movimiento browniano . . . . .	16
2.4. Continuidad y no diferenciabilidad de la trayectoria . . . . .	17
2.5. Propiedad de Markov . . . . .	19
3. La Integral de Itô	21
3.1. Definiciones preliminares . . . . .	21
3.2. Definición de la integral de Itô . . . . .	22
3.3. Propiedades de la integral de Itô . . . . .	22
3.4. Diferenciales estocásticas . . . . .	26
3.5. Lema de Itô . . . . .	27
4. Ecuaciones diferenciales estocásticas	30
4.1. Definiciones y ejemplos . . . . .	30
4.2. Existencia y unicidad de soluciones . . . . .	31
4.3. Propiedades de la solución . . . . .	34
4.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales . . . . .	35
<b>III Filtro de Kalman-Bucy</b>	<b>38</b>
5. Filtro de Kalman-Bucy	38
5.1. Definiciones y resultados preliminares . . . . .	38
5.2. Primera caracterización . . . . .	41
5.3. Segunda caracterización . . . . .	43
5.4. Ejemplo de aplicación . . . . .	46
<b>Referencias</b>	<b>49</b>

# Introducción

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es presentar, de manera autocontenida, una versión rigurosa del *Filtro de Kalman*, llamado así en honor de *Rudolf E. Kalman* (1930-2016), quien en los años sesenta presentó un conjunto de algoritmos que ha tenido un gran impacto en la tecnología de numerosas aplicaciones: navegación espacial, control de vehículos y aviones, robótica, teoría de señales, econometría, etc. En concreto, en este trabajo expon-dremos como motivación principal el llamado *Filtro de Kalman-Bucy*, que Kalman publicó junto a *Richard S. Bucy* (1935-), en su artículo de 1961 [5] referente al control respecto una ley de estado dada por una ecuación diferencial ordinaria estocástica.

Con el fin de una adecuada familiarización con los métodos e ideas del Filtro de Kalman-Bucy, comenzaremos esta memoria con una rápida exposición de algunos problemas de control de-terminista asociados (Parte I). Un problema de gran interés en sí mismo y que contiene ya un enfoque común con el Filtro de Kalman-Bucy es el denominado *Problema de seguimien-to (tracking)*, en el que, fijado un tiempo final  $t_f$ , se trata de encontrar el *control óptimo*  $\mathbf{u} \in L^2(0, t_f : \mathbb{R}^m)$  tal que el estado del sistema  $\mathbf{x} \in C([0, t_f] : \mathbb{R}^n)$ , con  $n \geq m \geq 1$ , solución del sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\varphi}(t), & 0 < t < t_f < \infty, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1)$$

(con  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{x}_0$  dados), optimice el *error de seguimiento* definido entre la *observación* (en la mayoría de casos obtenida a través de sensores) dando la observación parcial  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)$  y una señal de referencia  $\mathbf{r}(t)$ , como

$$\mathbf{e}(t) := \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t).$$

Más concretamente, el funcional a minimizar lo supondremos de tipo cuadrático:

$$\mathbb{J}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{e}(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)) dt,$$

con  $\mathbf{S}, \mathbf{Q}(t), \mathbf{R}(t)$  ciertas matrices dadas. El superíndice  $T$  denota transposición.

Veremos que la caracterización del control óptimo se obtiene mediante una variación de una formulación básica que se denomina *regulador lineal cuadrático*. Por otro lado, si modificamos ligeramente el problema de seguimiento, asumiendo que  $\mathbf{x}_0$  es desconocido, la caracteriza-ción del estado final óptimo en  $t_f$ , que llamamos  $\mathbf{x}^*(t_f)$ , ya se asemeja mucho al filtro de Kalman-Bucy, y por ello el resultado se denomina Filtro de Kalman determinista. Además, en esta Parte también se dan algunas nociones básicas de controlabilidad y observabilidad de sistemas lineales. La Parte I está elaborada a partir de los textos de *E. Trélat* [10] y *E.D. Sontag* [9].

La Parte II, que a su vez consta de tres capítulos, la hemos dedicado a una introducción a las *Ecuaciones Diferenciales Estocásticas* (EDE). La referencia esencial de nuestra presentación es el libro de *L.C. Evans* [4]. También usamos el libro de *L. Arnold* [1]. El objetivo principal es modificar adecuadamente la noción de solución de la ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{b}(t, \mathbf{x}(t)), & 0 < t < T, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

(con  $\mathbf{b} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0$  dados), para incorporar términos y ruidos aleatorios que puedan describir una multitud de sistemas que no siguen una trayectoria completamente determinista, es decir cuya trayectoria es un proceso estocástico  $\mathbf{X}(\cdot)$ . El primer ingrediente de la formalización es el llamado *movimiento browniano* o *Proceso de Wiener*  $\mathbf{W}(\cdot)$  en  $\mathbb{R}^n$ , llamado así por *N. Wiener* (1894-1964), que se define y se estudia en la Sección 2. Este proceso nos permite construir la *integral estocástica* (Sección 3), que dota de sentido a expresiones del tipo

$$\int_0^t \mathbf{B}(s, \mathbf{X}(s)) d\mathbf{W}(s), \quad \mathbf{B} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}^{n \times m},$$

cuando  $\mathbf{W}(s)$  es un proceso de Wiener. Nosotros abordamos la *integral de Itô*, debida a *K. Itô* (1915-2008), pero otras construcciones, como la *integral de Stratonovich* (1930-1997), son posibles. A partir de la integral estocástica, se define la diferencial estocástica, surgiendo una serie de técnicas de este "nuevo cálculo" que centralizamos en el *Lema de Itô*. En la Sección 4 se define al fin la noción de solución de una EDE. Se dice que  $\mathbf{X}(\cdot)$  verifica la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} d\mathbf{X}(t) = \mathbf{b}(t, \mathbf{X}(t))dt + \mathbf{B}(t, \mathbf{X}(t))d\mathbf{W}(t), & 0 \leq t \leq T, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \end{cases} \quad (2)$$

con  $\mathbf{X}_0$  cierta variable aleatoria  $n$ -dimensional, si satisface que

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(s, \mathbf{X}(s))ds + \int_0^t \mathbf{B}(s, \mathbf{X}(s))d\mathbf{W}(s), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Demostraremos que, bajo ciertas condiciones, la ecuación (2) tiene solución única, y proporcionamos la fórmula de la solución para el relevante caso en el que la ecuación diferencial es lineal.

Por último, en la Parte III, llevamos a cabo una presentación del conjunto de resultados que se conoce como el *Filtro de Kalman-Bucy*. Frente a las muchas referencias en las que se trata este importante tema, nos hemos inclinado por seguir la presentación que se realiza en el libro de *P.A. Ruymgaart* y *T.T. Soong* [8], por su alto rigor matemático. En esencia, se parte de un sistema dinámico estocástico dado por

$$\begin{cases} d\mathbf{X}(t) = (\mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{X}(t))dt + d\mathbf{W}(t), & 0 \leq t \leq T, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \end{cases}$$

con  $\mathbf{c} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{D} : [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^{n \times n}$  continuas,  $\mathbf{W}$  un proceso de Wiener  $n$ -dimensional, y se supone conocida una observación parcial acumulativa del sistema

$$\mathbf{Z}(s) = \int_0^s \mathbf{H}(u)\mathbf{X}(u)du + \mathbf{W}^*(s), \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

con  $\mathbf{H} : [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^{m \times n}$  continua, y  $\mathbf{W}^*(s)$  un proceso de Wiener  $m$ -dimensional conocido que es independiente de  $\mathbf{W}$ , y queremos construir un nuevo proceso  $\hat{\mathbf{X}}$ , a partir de la observación, tal que la media cuadrática con respecto al proceso original sea la menor posible.  $\hat{\mathbf{X}}$  recibe el nombre de *Estimador de Kalman-Bucy*. Nuestro propósito es caracterizar dicho

estimador de una forma sencilla y que permita calcularlo en la práctica. Vemos que el planteamiento del problema es parecido al del Filtro de Kalman determinista, y las conclusiones obtenidas también lo serán, aunque esta vez en el marco estocástico.

En el desarrollo de este trabajo se darán por sabidos los contenidos impartidos a lo largo del Grado en Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, siendo especialmente importantes los resultados de Probabilidad, Análisis y Procesos Estocásticos. Utilizamos el convenio de suma de Einstein, en el que índices repetidos representan una suma sobre todos los posibles valores de dicho índice. En algunos casos, no obstante, se explicitará dicha suma. Asumimos que todas las variables aleatorias analizadas en la Parte II y la Parte III están definidas en un cierto espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ , con  $\Omega$  un conjunto no vacío,  $\mathcal{U}$  una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ , y  $P$  una medida de probabilidad en  $\mathcal{U}$ . Para generar las figuras se ha usado `Python`.

Muchos de los conceptos aquí desarrollados tienen una enorme relevancia práctica actual. El problema de seguimiento que hemos introducido es importante en aeronavegación o robótica. Las ecuaciones diferenciales estocásticas son una generalización de las ecuaciones diferenciales ordinarias, y por ello, sirven para modelizar multitud de sistemas físicos, desde la dinámica de las moléculas hasta sistemas en los que los efectos cuánticos pueden ser expresados mediante perturbaciones estocásticas. Además, muchos modelos ampliamente usados en Matemática Financiera usan la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas, como el famoso modelo *Black-Scholes*. Sobre el Filtro de Kalman, ya hemos mencionado algunas de sus muchas aplicaciones, y de hecho, se estudiará en detalle una de ellas en la Parte III.

## Parte I

# Nociones de control determinista

## 1. Control óptimo determinista

Un problema central de la Teoría de Control Óptimo determinista parte de un cierto sistema dinámico (determinista) dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),$$

con  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y  $\mathbf{u}$  un control, que se debe elegir optimizando el coste dado por

$$\mathbb{J}[\mathbf{u}] = \int_0^{t_f} \mathbf{r}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t_f)), \quad (4)$$

donde  $\mathbf{r} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{g} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones dadas. El objetivo es caracterizar el Control Óptimo minimizante  $\mathbf{u}^*$  sobre una cierta clase de controles  $\mathcal{A}$  tal que

$$\mathbb{J}[\mathbf{u}^*] = \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}} \mathbb{J}[\mathbf{u}]. \quad (5)$$

### 1.1. Controlabilidad y Observabilidad

Recordemos que los problemas de control óptimo determinista se suelen analizar en la Teoría de Control como una continuación natural de los llamados *problemas de controlabilidad*, en los que se prefija un estado deseado  $\mathbf{x}_f$  que se pretende alcanzar en el tiempo final, i.e.  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ , eligiendo adecuadamente el control  $\mathbf{u}(t)$ . Nos restringimos ahora al estudio de la controlabilidad de sistemas lineales por simplicidad en la exposición.

**Definición 1.1.** El sistema dinámico controlado lineal

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (6)$$

con  $\mathbf{A} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n \times n})$ ,  $\mathbf{B} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n \times m})$  es controlable en tiempo  $t_f$  desde  $\mathbf{x}_0$  si

$$\{\mathbf{x}(t_f) : \mathbf{u} \in L^\infty(0, t_f : \mathbb{R}^m)\} = \mathbb{R}^n.$$

Es decir, para todo  $\mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^n$  existe un control  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, t_f : \mathbb{R}^m)$  tal que la trayectoria correspondiente conecta  $\mathbf{x}_0$  con  $\mathbf{x}_f$  en  $t_f$ .

El importante Teorema de Kalman (publicado en 1963 junto con *Y. C. Ho* y *K. Narendra* [6]) proporciona una caracterización de la controlabilidad de los sistemas lineales.

**Teorema 1.2.** Sea  $\Phi(t)$  la matriz fundamental asociada a  $\mathbf{A}(t)$ , i.e. la solución de

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = I.$$

Entonces, el sistema dinámico controlado lineal (6) es controlable en tiempo  $t_f$  desde cualquier  $\mathbf{x}_0$  si y solo si la matriz de Controlabilidad asociada, que definimos como la matriz

$$\mathbf{W}_c := \int_0^{t_f} \Phi(t)^{-1} \mathbf{B}(t) \mathbf{B}(t)^T (\Phi(t)^{-1})^T dt,$$

tiene rango  $n$ .

Además, para sistemas lineales autónomos, en los que  $\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}(t) \equiv \mathbf{B}$ , la condición necesaria y suficiente de controlabilidad en tiempo cualquiera  $t_f$  desde cualquier  $\mathbf{x}_0$ , conocida como *condición de Kalman*, es simplemente

$$\text{rg}[\mathbf{B}, \mathbf{BA}, \dots, \mathbf{BA}^{n-1}] = n.$$

Los detalles pueden verse, por ejemplo, en los Teoremas 2.2.1 y 2.3.1 de [10].

Puede mostrarse que, cuando el sistema es controlable, existe una infinidad de controles tal que la trayectoria correspondiente conecta  $\mathbf{x}_0$  con  $\mathbf{x}_f$  en  $t_f$ . Por lo tanto, es pertinente buscar el control que minimiza algún coste, como por ejemplo el que se propone en (4).

En muchos casos, como veremos, tendremos a nuestra disposición una observación parcial  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)$ , con  $\mathbf{C}(\cdot)$  una cierta función matricial de dimensión  $p \times n$ . En este caso, surgen los llamados *problemas de Observabilidad* en los que se trata de encontrar condiciones suficientes (y necesarias) que permiten asegurar que si dos observaciones son iguales, entonces los estados de los sistemas son iguales.

**Definición 1.3.** Sea el sistema dinámico controlado lineal con observación parcial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (7)$$

con  $\mathbf{A} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n \times n})$ ,  $\mathbf{B} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n \times m})$  y  $\mathbf{C} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{p \times n})$ . Sean  $\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{R}^n$  dos datos iniciales cualesquiera, y denotemos por  $\mathbf{y}(t), \mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{x}}(t)$  la observación y el estado del sistema asociado a  $\mathbf{x}_0$  y  $\hat{\mathbf{x}}_0$ , respectivamente. Entonces, el sistema se dice observable en tiempo  $t_f$  si, para cualquier control  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, t_f : \mathbb{R}^m)$  tal que  $\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{y}}(t), 0 \leq t \leq t_f$ , se tiene necesariamente que  $\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0$ .

Equivalentemente, el sistema es observable si, dados cualesquiera  $\mathbf{x}_0$  y  $\hat{\mathbf{x}}_0$  distintos entre sí, existe un control  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, t_f : \mathbb{R}^m)$  tal que las observaciones  $\mathbf{y}(t)$  y  $\hat{\mathbf{y}}(t)$  difieren en algún instante. De nuevo, Kalman caracterizó la observabilidad de los sistemas lineales por el siguiente teorema:

**Teorema 1.4.** Sea  $\Phi(t)$  la matriz fundamental asociada a  $\mathbf{A}(t)$ , i.e. la solución de

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = \mathbf{I}.$$

Entonces, el sistema dinámico controlado lineal con observación (7) es observable en tiempo  $t_f$  si y solo si la matriz de Observabilidad asociada, que definimos como la matriz

$$\mathbf{W}_o := \int_0^{t_f} \Phi(t)^T \mathbf{C}(t)^T \mathbf{C}(t) \Phi(t) dt,$$

tiene rango  $n$ .

Para el caso de sistemas lineales autónomos, la caracterización de la observabilidad viene dada a partir de la condición

$$\text{rg}[\mathbf{C}, \mathbf{CA}, \dots, \mathbf{CA}^{n-1}]^T = n.$$

Para más información sobre la observabilidad, puede consultarse [9], Cap. 6.



## 1.2. Problema de seguimiento

En esta sección nos centramos en algunos casos particulares que son, sin embargo, de enorme relevancia y aplicabilidad. Asumiremos que  $\mathbf{f}$  es una aplicación lineal, fijaremos un dato inicial  $\mathbf{x}_0$  y un tiempo final  $t_f < \infty$ . Supondremos que el funcional a minimizar es de un cierto tipo, llamado *regulador cuadrático lineal*. Por supuesto, cierta regularidad o integrabilidad sobre todas las funciones involucradas, en particular el control, será exigida.

**Teorema 1.5.** *Sea el sistema dinámico controlado lineal*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), & 0 < t < t_f, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (8)$$

con  $\mathbf{A} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n \times n})$ ,  $\mathbf{B} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n \times m})$ ,  $\mathbf{u} \in L^2(0, t_f : \mathbb{R}^m)$ . Consideremos el coste cuadrático lineal dado por

$$\mathbb{J}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)) dt,$$

con  $\mathbf{Q} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n \times n})$ ,  $\mathbf{S} \in \mathcal{M}^{n \times n}$  matrices simétricas semidefinidas positivas,  $\mathbf{R} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{m \times m})$  simétrica definida positiva. Supongamos que se satisface la condición

$$\exists \alpha > 0 : \forall \mathbf{u} \in L^2(0, t_f : \mathbb{R}^m) \quad \int_0^{t_f} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) dt \geq \alpha \int_0^{t_f} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt. \quad (9)$$

Entonces, existe un único control óptimo minimizante  $\mathbf{u}^*$  dado por

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}^*(t), \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad (10)$$

donde  $\mathbf{P} : [0, t_f] \rightarrow \mathcal{M}^{n \times n}$  es la solución de la ecuación diferencial no lineal de Riccati

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t) = 0, & 0 < t < t_f, \\ \mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S}. \end{cases} \quad (11)$$

Además, el estado óptimo  $\mathbf{x}^*(t)$  es

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}_0 \exp \left( \int_0^t (\mathbf{A}(s) - \mathbf{B}(s) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T(s) \mathbf{P}(s)) ds \right), \quad (12)$$

y el coste para el control óptimo vale

$$\mathbb{J}[\mathbf{u}^*] = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}(0) \mathbf{x}_0.$$

Una demostración se ofrece en el Cap. 4 de [10]. Es importante exigir la condición (9) para asegurar la existencia de un único control óptimo minimizante.  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{R}$  son semidefinidas positivas para que las distintas contribuciones a  $\mathbb{J}[\mathbf{u}]$  sean todas positivas. De hecho,  $\mathbf{R}$  es definida positiva, con lo que su invertibilidad queda garantizada. La matriz  $\mathbf{P}(t)$  dada en el teorema anterior es de una gran importancia, pues como hemos visto en el teorema anterior, determina el control óptimo y el estado óptimo.

A continuación, a partir de este resultado, obtenemos el control óptimo para un problema más general, llamado problema de *seguimiento bajo perturbaciones* en los que se introduce una *observación parcial*  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)$ , una *señal* a seguir  $\mathbf{r}(t)$ , y una posible perturbación conocida  $\boldsymbol{\varphi}(t)$ . El coste se supone dado por un funcional cuadrático.

**Teorema 1.6** (Problema de seguimiento). *Sea el sistema dinámico controlado lineal no homogéneo*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\varphi}(t), & 0 < t < t_f < \infty, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

con  $\mathbf{A} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n \times n})$ ,  $\mathbf{B} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n \times m})$ ,  $\mathbf{u} \in L^2(0, t_f : \mathbb{R}^m)$ , y una perturbación  $\boldsymbol{\varphi} \in L^\infty(0, t_f : \mathbb{R}^n)$ . Sea una observación parcial del sistema  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)$ , con  $\mathbf{C} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{p \times n})$ , y sea una señal dada  $\mathbf{r} : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Consideremos el coste cuadrático dado por

$$\mathbb{J}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{S}\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} (\mathbf{e}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t))dt, \quad (13)$$

con  $\mathbf{e}(t) := \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)$  el error de seguimiento,  $\mathbf{Q} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{p \times p})$ ,  $\mathbf{S} \in \mathcal{M}^{n \times n}$  simétricas semidefinidas positivas,  $\mathbf{R} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{m \times m})$  simétrica definida positiva. Supongamos que se satisface la condición (9). Entonces, existe un único control óptimo minimizante  $\mathbf{u}^*$  que está dado por

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\beta}(t), \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad (14)$$

donde  $\mathbf{F}(t) := -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)$ , con  $\mathbf{P} : [0, t_f] \rightarrow \mathcal{M}^{n \times n}$  la solución de la ecuación no lineal de Riccati

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S} \end{cases} \quad (15)$$

en  $0 < t < t_f$ , y siendo  $\boldsymbol{\beta} : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  la solución de la ecuación lineal

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\beta}}(t) = -(\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{F}(t))^T\boldsymbol{\beta}(t) + \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(t) - \mathbf{P}(t)\boldsymbol{\varphi}(t), & 0 < t < t_f, \\ \boldsymbol{\beta}(t_f) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (16)$$

Además, el estado óptimo  $\mathbf{x}^*(t)$  viene dado por la solución de

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^*(t) = (\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{F}(t))\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\beta}(t), & 0 < t < t_f, \\ \mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (17)$$

Por último, el valor del coste para el estado óptimo es

$$\mathbb{J}[\mathbf{u}^*] = \mathbf{x}_0^T\mathbf{P}(0)\mathbf{x}_0 + 2\boldsymbol{\beta}^T(0)\mathbf{x}_0 + a,$$

con  $a = -\int_0^{t_f} (\boldsymbol{\beta}^T(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\beta}(t) - \mathbf{r}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(t) - 2\boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\beta}(t))dt$ .

*Demostración.* Seguimos ahora [9]. Escribimos el problema de forma equivalente, de modo que podamos usar el Teorema 1.5. Aumentamos el espacio de estados en una dimensión mediante  $x_{n+1} = 1$ . En efecto, definimos

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}(t)\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}(t)\mathbf{u}(t), & 0 < t < t_f \\ \bar{\mathbf{x}}(0) = (\mathbf{x}_0 \ 1)^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \end{cases}$$

con

$$\bar{\mathbf{A}} := \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{\varphi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n+1, n+1}), \quad \bar{\mathbf{B}} := \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{pmatrix} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n+1, m}).$$

Consideramos el nuevo coste asociado

$$\mathbb{J}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}}^T(t_f) \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{x}}(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\bar{\mathbf{x}}^T(t) \bar{\mathbf{Q}}(t) \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)) dt,$$

donde ahora mediante

$$\bar{\mathbf{Q}} := \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} & -\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{r} \\ -\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} & \mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{r} \end{pmatrix} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n+1, n+1}), \quad \bar{\mathbf{S}} := \begin{pmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n+1, n+1}).$$

Tras desarrollar las matrices, vemos que el valor del nuevo coste es exactamente el mismo que el de (13). Además,  $\bar{\mathbf{Q}}$  y  $\bar{\mathbf{S}}$  son semidefinidas positivas. Entonces, al satisfacerse las hipótesis del Teorema 1.5, tenemos que (11) se escribe ahora

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{P}}}(t) + \bar{\mathbf{P}}(t) \bar{\mathbf{A}}(t) + \bar{\mathbf{A}}^T(t) \bar{\mathbf{P}}(t) - \bar{\mathbf{P}}(t) \bar{\mathbf{B}}(t) \bar{\mathbf{R}}^{-1}(t) \bar{\mathbf{B}}^T(t) \bar{\mathbf{P}}(t) + \bar{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{0}, & 0 < t < t_f, \\ \bar{\mathbf{P}}(t_f) = \bar{\mathbf{S}}. \end{cases}$$

Escribiendo la matriz  $\bar{\mathbf{P}}$  por bloques

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}^T & \alpha \end{pmatrix} : [0, t_f] \rightarrow \mathcal{M}^{n+1, n+1}$$

y desarrollando, se obtiene inmediatamente (15) y (16). A partir de (12), vemos que  $\bar{\mathbf{x}}^*$  satisface

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}^*}(t) = (\bar{\mathbf{A}}(t) - \bar{\mathbf{B}}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \bar{\mathbf{B}}^T(t) \bar{\mathbf{P}}(t)) \bar{\mathbf{x}}^*(t),$$

con lo que, de nuevo desarrollando, el estado óptimo  $\mathbf{x}^*$  cumple (17). La expresión (14) para el control óptimo se obtiene de

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \bar{\mathbf{B}}^T(t) \bar{\mathbf{P}}(t) \bar{\mathbf{x}}^*(t).$$

Por último, el coste para el estado óptimo es

$$\mathbb{J}[\mathbf{u}^*] = \bar{\mathbf{x}}^T(0) \bar{\mathbf{P}}^T(0) \bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}(0) \mathbf{x}_0 + 2\boldsymbol{\beta}^T(0) \mathbf{x}_0 + \alpha(0),$$

con  $\alpha$  la solución de

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \boldsymbol{\beta}^T(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\beta}(t) - \mathbf{r}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{r}(t) - 2\boldsymbol{\varphi}^T(t) \boldsymbol{\beta}(t), \\ \alpha(t_f) = 0, \end{cases}$$

que se obtiene a partir de la ecuación matricial de Ricatti obtenida, y cuyo valor  $\alpha(0)$  es precisamente  $a$  dada en el enunciado del teorema.  $\square$

La Figura 1 muestra gráficamente la idea del problema del seguimiento.

Si  $\mathbf{r} \equiv \boldsymbol{\varphi} \equiv \mathbf{0}$  tenemos un problema de control óptimo como el del Teorema 1.5, pero ahora con una observación parcial. En este caso,  $\boldsymbol{\beta} \equiv \mathbf{0}$ , por lo que, comparando las expresiones obtenidas, es idéntico a la situación sin observación parcial, con el único cambio  $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}$ . De este modo, en estas condiciones, si tomamos  $\mathbf{C} = \mathbf{Id} \in \mathcal{M}^{n \times n}$  recuperamos el Teorema 1.5. En cualquier otro caso, no podemos asegurar que  $\boldsymbol{\beta}$  sea nula, y lo que vemos entonces es que tanto al estado óptimo como al control de nuestro sistema dinámico

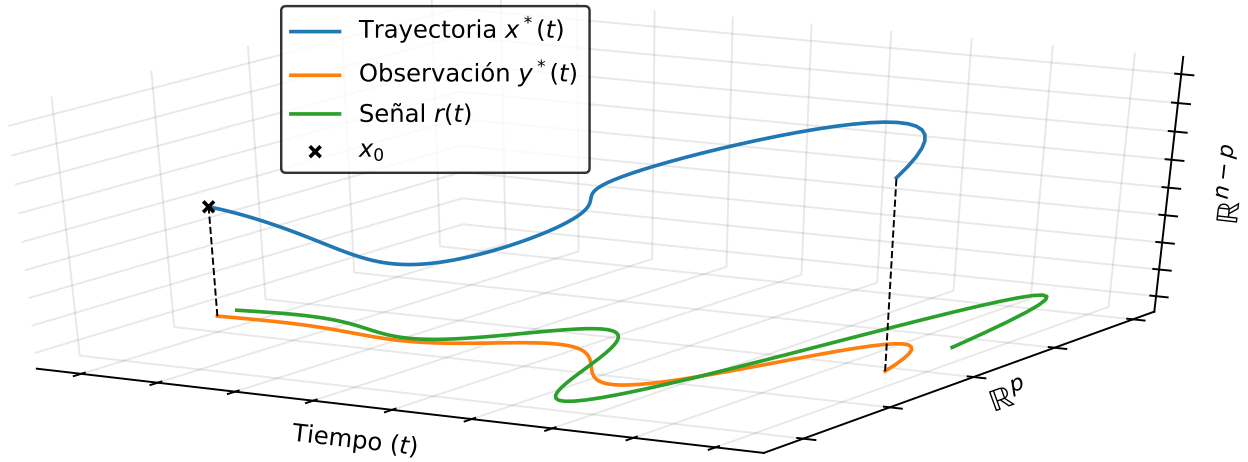


Figura 1: Representación gráfica del problema del seguimiento, en el que la trayectoria óptima  $\mathbf{x}^*(t) \in \mathbb{R}^n$  tiene asociada una observación  $\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}^*(t) \in \mathbb{R}^p$  que sigue la señal  $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^p$  de forma que el coste cuadrático (13) es mínimo.

lineal con observación parcial se le añade un término proporcional a  $\beta$  que da cuenta tanto de la perturbación  $\varphi$  como de la señal  $\mathbf{r}$ .

Un caso muy parecido al estudiado surge cuando se quiere minimizar el funcional dado por

$$\mathbb{J}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{e}(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)) dt,$$

donde ahora  $\mathbf{S} \in \mathcal{M}^{p \times p}$ . Aquí, la demostración es análoga a la del teorema anterior, pero en este caso la matriz  $\bar{\mathbf{S}}$  se define como

$$\bar{\mathbf{S}} := \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{C}(t_f) & -\mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{r}(t_f) \\ -\mathbf{r}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{r}(t_f) & \mathbf{r}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{r}(t_f) \end{pmatrix} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n+1, n+1}).$$

obteniendo las mismas conclusiones que en el teorema, con la salvedad de que ahora  $\beta(t_f) = \mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{r}(t_f)$ ,  $\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{C}^T(t_f)$ , y  $\alpha(t_f) = \mathbf{r}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{r}(t_f)$ . También es importante mencionar que los controles óptimos obtenidos son de tipo *feedback*, es decir, dependen a tiempo  $t$  del estado del sistema en  $t$ ,  $\mathbf{x}^*(t)$ .

### 1.3. Filtro de Kalman determinista

A continuación, probamos un teorema similar al Teorema 1.6, con la importante diferencia de que, en este caso,  $\mathbf{x}_0$  es desconocido. Asumiremos que no hay perturbaciones, i.e.  $\varphi \equiv \mathbf{0}$ . Además, el coste optimiza una función cuadrática del punto inicial  $\mathbf{x}(0)$ , que es desconocido *a priori* (en lugar del punto final  $\mathbf{x}(t_f)$ , como veníamos haciendo). Supondremos ahora que  $\mathbf{S}$  es definida positiva. El interés es obtener el control óptimo, y el estado óptimo en  $t_f$ , i.e.  $\mathbf{x}^*(t_f)$ .

**Teorema 1.7.** *Sea el sistema dinámico controlado lineal sin dato inicial*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad 0 < t < t_f \quad (18)$$

con  $\mathbf{A} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n \times n})$ ,  $\mathbf{B} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{n \times m})$ ,  $\mathbf{u} \in L^2(0, t_f : \mathbb{R}^m)$ . Sea una observación parcial del sistema  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)$ , con  $\mathbf{C} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{p \times n})$ , y una señal  $\mathbf{r} : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Consideremos el regulador cuadrático asociado al estado inicial (que se supone desconocido)

$$\mathbb{J}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(0)\mathbf{S}\mathbf{x}(0) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} (\mathbf{e}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t))dt, \quad (19)$$

con  $\mathbf{e}(t) := \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)$  el error de seguimiento,  $\mathbf{Q} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{p \times p})$  simétrica semidefinida positiva,  $\mathbf{R} \in L^\infty(0, t_f : \mathcal{M}^{m \times m})$ ,  $\mathbf{S} \in \mathcal{M}^{n \times n}$  simétrica definida positiva. Supongamos que se satisface la condición (9). Entonces, existe un único control óptimo minimizante, y viene dado por

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{F}(t)\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\beta}(t), \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad (20)$$

donde  $\mathbf{F}(t) := -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)$ , con  $\mathbf{P} : [0, t_f] \rightarrow \mathcal{M}^{n \times n}$  la solución de la ecuación no lineal de Riccati

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{S} \end{cases} \quad (21)$$

en  $0 < t < t_f$ , y  $\boldsymbol{\beta} : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  la solución del problema lineal

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\beta}}(t) = -(\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{F}(t))^T\boldsymbol{\beta}(t) - \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(t), & 0 < t < t_f, \\ \boldsymbol{\beta}(0) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (22)$$

Además, el estado óptimo  $\mathbf{x}^*(t)$  viene dado por la solución de

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^*(t) = (\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{F}(t))\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\beta}(t), & 0 < t < t_f, \\ \mathbf{x}^*(t_f) = -\mathbf{P}^{-1}(t_f)\boldsymbol{\beta}(t_f). \end{cases} \quad (23)$$

Por último, el valor del coste para el control óptimo es

$$\mathbb{J}[\mathbf{u}^*] = \boldsymbol{\beta}^T(t_f)\mathbf{P}^{-1}(t_f)\boldsymbol{\beta}(t_f) + a, \quad (24)$$

con  $a = -\int_0^{t_f} (\boldsymbol{\beta}^T(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\beta}(t) - \mathbf{r}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(t))dt$ .

*Demostración.* Tratamos de reducirnos al Teorema 1.6. Definimos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t) &:= \mathbf{x}(t_f - t), \quad \tilde{\mathbf{u}}(t) := \mathbf{u}(t_f - t), \quad \tilde{\mathbf{A}}(t) := \mathbf{A}(t_f - t), \quad \tilde{\mathbf{B}}(t) := \mathbf{B}(t_f - t), \\ \tilde{\mathbf{r}}(t) &:= \mathbf{r}(t_f - t), \quad \tilde{\mathbf{Q}}(t) := \mathbf{Q}(t_f - t), \quad \tilde{\mathbf{R}}(t) := \mathbf{R}(t_f - t), \quad \tilde{\mathbf{C}}(t) := \mathbf{C}(t_f - t), \end{aligned}$$

y consideramos el problema de minimizar

$$\tilde{\mathbb{J}}[\tilde{\mathbf{u}}] = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}^T(t_f)\mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}}(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} (\tilde{\mathbf{e}}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}(t)\tilde{\mathbf{e}}(t) + \tilde{\mathbf{u}}^T(t)\tilde{\mathbf{R}}(t)\tilde{\mathbf{u}}(t))dt,$$

con  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(t)\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}(t)\tilde{\mathbf{u}}(t)$ . Por construcción,  $\tilde{\mathbb{J}}[\tilde{\mathbf{u}}] = \mathbb{J}[\mathbf{u}]$ . Para cada condición inicial  $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ , el Teorema 1.6 se satisface, sustituyendo las cantidades que aparecen ahí por las definidas aquí. Deshaciendo el cambio, obtenemos las expresiones (20), (21), (22). El coste óptimo para cada condición inicial  $\tilde{\mathbf{x}}(0)$  es

$$\mathbb{J}[\mathbf{u}^*]_{\tilde{\mathbf{x}}(0)} = \tilde{\mathbf{x}}^T(0)\tilde{\mathbf{P}}(0)\tilde{\mathbf{x}}(0) + 2\tilde{\boldsymbol{\beta}}^T(0)\tilde{\mathbf{x}}(0) + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(0),$$

y queremos ver para qué condición inicial el coste es mínimo. Puede verse (ver [9]) que, como  $\mathbf{S}$  es definida positiva, la matriz  $\tilde{\mathbf{P}}(0)$  es simétrica definida negativa. Entonces, considerando el coste anterior como función de  $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ , es una función estrictamente convexa, de forma que admite un único mínimo, que vemos inmediatamente que es

$$\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(t_f) = -\tilde{\mathbf{P}}^{-1}(0)\tilde{\boldsymbol{\beta}}(0) = -\mathbf{P}^{-1}(t_f)\boldsymbol{\beta}(t_f),$$

de donde se obtienen inmediatamente (23) y (24).  $\square$

Como habíamos dicho, dada una observación, queríamos obtener una estimación de  $\mathbf{x}^*(t_f)$ . Hemos visto que  $\mathbf{x}^*(t_f) = -\mathbf{P}^{-1}(t_f)\boldsymbol{\beta}(t_f)$ . Dado que invertir la matriz  $\mathbf{P}(t)$  puede ser complicado, llamando  $\mathbf{G}(t) = \mathbf{P}^{-1}(t)$ , tenemos a partir de (21) y de  $\dot{\mathbf{G}}(t) = -\mathbf{G}(t)\dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{G}(t)$  una ecuación diferencial para  $\mathbf{G}$ . Con ello y tras derivar, tenemos una ecuación diferencial para  $\mathbf{z}(t) := -\mathbf{G}(t)\boldsymbol{\beta}(t)$ , que cumplirá  $\mathbf{z}(t_f) = \mathbf{x}(t_f)$ . El resultado, desarrollado en [9], es el siguiente:

**Teorema 1.8.** *En las hipótesis del Teorema 1.7, se cumple que  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{z}(t_f)$ , con  $\mathbf{z}$  la solución de*

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = (\mathbf{A}(t) - \mathbf{G}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t))\mathbf{z}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{0}, \quad (25)$$

donde  $\mathbf{G}$  es la solución del problema no lineal de tipo Riccati

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{G}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{A}^T(t) - \mathbf{G}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{G}(t), \\ \mathbf{G}(0) = \mathbf{S}^{-1}. \end{cases} \quad (26)$$

En multitud de situaciones, la descripción determinista que hemos dado aquí para el *filtrado* (i.e. para la estimación del estado final) no es suficiente, pues en la práctica hay perturbaciones de carácter aleatorio (ruidos) en el sistema y en la observación. Así, un tratamiento estocástico para estimar  $\mathbf{x}^*(t)$  es más adecuado, y formulándolo así, el problema de minimizar el coste se interpreta como el problema de hallar un estado final de varianza mínima, dada una cierta observación, como veremos en la parte III de este TFG. Realizamos previamente una revisión de la formulación estocástica de las ecuaciones diferenciales en la parte II.

## Parte II

# Teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas

## 2. Movimiento browniano

### 2.1. Motivación

El estudio del movimiento browniano surgió como un intento de explicar los movimientos erráticos de ciertas partículas, como por ejemplo granos de polen suspendidas en agua. Al considerar dos partículas, sus movimientos parecían ser independientes uno del otro.

Supongamos pues que una partícula se puede mover únicamente hacia la derecha o hacia la izquierda una distancia  $\Delta x$ , en cada tiempo  $\Delta t$ ,  $n = 0, \dots$  con probabilidad  $1/2$  en cada caso. Veamos cuál es la distribución que sigue  $X(t)$ , que es la posición de la partícula en  $t = n\Delta t$ . Sean  $X_i$  variables aleatorias (v.a.) independientes tal que

$$\begin{cases} P(X_i = 0) = 1/2 \\ P(X_i = 1) = 1/2 \end{cases},$$

y  $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ . Así,  $S_n$  es el número de movimientos hacia la derecha hasta el tiempo  $t = n\Delta t$ . Asumiendo que  $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = D$ , la posición habiendo dado  $n$  pasos es

$$X_n(t) = S_n \Delta x + (n - S_n)(-\Delta x) = (2S_n - n)\Delta x = \left( \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \right) \sqrt{n} \Delta x = \left( \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \right) \sqrt{tD}.$$

Además,  $E(X_i) = 1/2$  y  $V(X_i) = 1/4$ . Denotamos  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  a una variable aleatoria con distribución normal de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Por el Teorema Central del Límite, en concreto, el Teorema de Lindeberg-Levy, la distribución es tal que  $\frac{X_n(t)}{\sqrt{tD}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , luego

$$X(t) \sim \mathcal{N}(0, Dt).$$

### 2.2. Definición y propiedades elementales

Tomaremos  $D = 1$ . La discusión anterior motiva la definición, que sigue la referencia [4]:

**Definición 2.1.** Un proceso estocástico real  $W(\cdot)$  es un *movimiento browniano* o *proceso de Wiener* unidimensional si

- a)  $W(0) = 0$  en todo  $\omega \in \Omega$  salvo un conjunto de probabilidad cero, i.e. casi seguro (c.s.),
- b)  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ ,  $t \geq s \geq 0$ ,
- c) para cualesquiera tiempos  $0 < t_1 < \dots < t_n$  las variables aleatorias  $W(t_1)$ ,  $W(t_2) - W(t_1)$ ,  $\dots$ ,  $W(t_n) - W(t_{n-1})$  son independientes.

La propiedad (b) equivale a decir que el proceso tiene *incrementos estacionarios*, en este caso con distribución normal. Además, la propiedad (c) recibe el nombre de *incrementos*

*independientes*. Nótese que  $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ , como era natural.

En adelante, si  $\mathbf{X}$  es una variable aleatoria, denotaremos  $\mathcal{U}(\mathbf{X})$  a la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathbf{X}$ .

**Definición 2.2.** Un proceso estocástico en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{W}(\cdot) = (W^1(\cdot), \dots, W^n(\cdot))$  es un *movimiento browniano*  $n$ -dimensional si

- a)  $W^k(\cdot)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , es un proceso de Wiener unidimensional,
- b)  $\mathcal{W}^k := \mathcal{U}(W^k(t)|t \geq 0)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , son independientes.

El siguiente teorema es fundamental para calcular probabilidades y esperanzas de movimientos brownianos.

**Teorema 2.3.** Para cada  $m = 1, 2, \dots$  y cada función  $f : \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}$ , se tiene

$$\begin{aligned} E(f(\mathbf{W}(t_1), \dots, \mathbf{W}(t_m))) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_m) g(x_1, t_1|0) g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \dots g(x_m, t_m - t_{m-1}|x_{m-1}) dx_m \dots dx_1, \end{aligned} \quad (27)$$

donde

$$g(x, t|y) := \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}.$$

*Demostración.* Las variables  $W^1(t), \dots, W^n(t)$  son independientes, luego la función de densidad conjunta de  $\mathbf{W}(t)$  es

$$f_{\mathbf{W}(t)}(x_1, \dots, x_n) = f_{W^1(t)}(x_1) \dots f_{W^n(t)}(x_n) = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x_1^2}{2t}} \dots \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x_n^2}{2t}} = g(x, t|0).$$

Sea  $\mathbf{X}_i := \mathbf{W}(t_i)$ ,  $\mathbf{Y}_i := \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Sea también

$$h(y_1, \dots, y_m) := f(y_1, y_1 + y_2, \dots, y_1 + \dots + y_m).$$

Entonces  $E(f(\mathbf{W}(t_1), \dots, \mathbf{W}(t_m))) = E(h(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_m))$ . Ahora bien,  $\mathbf{Y}_i = \mathbf{W}(t_i) - \mathbf{W}(t_{i-1})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , son v.a. independientes, y cada  $\mathbf{Y}_i$  tiene como densidad  $g(x, t_i - t_{i-1}|0)$ . De este modo,

$$\begin{aligned} E(f(\mathbf{W}(t_1), \dots, \mathbf{W}(t_m))) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} h(y_1, \dots, y_m) g(y_1, t_1|0) g(y_2, t_2 - t_1|0) \dots g(y_m, t_m - t_{m-1}|0) dy_m \dots dy_1, \end{aligned}$$

obteniendo el resultado tras el cambio de variable  $y_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , cuyo jacobiano es la identidad.  $\square$

En particular, tomando  $m = 1$  y  $f(x) = \chi_A(x)$  (la función característica de  $A$ ), resulta

$$P(\mathbf{W}(t) \in A) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_A e^{-\frac{|x|^2}{2t}} dx.$$



Por otro lado, si  $n = 1$ , y  $f(x_1, \dots, x_n) = \chi_{[a_1, b_1]}(x_1) \cdots \chi_{[a_m, b_m]}(x_m)$ , la probabilidad conjunta es

$$\begin{aligned} P(a_1 \leq W(t_1) \leq b_1, \dots, a_m \leq W(t_m) \leq b_m) &= \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_m}^{b_m} g(x_1, t_1|0)g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \cdots g(x_m, t_m - t_{m-1}|x_{m-1})dx_m \cdots dx_1. \end{aligned} \quad (28)$$

**Lema 2.4.** Sea  $W(\cdot)$  un proceso de Wiener unidimensional. Entonces

$$E(W(t)) = 0, \quad E(W(t)^2) = t, \quad t \geq 0,$$

y

$$E(W(t)W(s)) = t \wedge s := \min\{s, t\}, \quad t, s \geq 0.$$

*Demostración.*  $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ , luego tiene esperanza 0, y  $V(W(t)) := E(W(t)^2) - E(W(t))^2 = E(W(t)^2) = t$ . Por otro lado, si  $t \geq s \geq 0$ ,

$$E(W(t)W(s)) = E(W(s)^2) + E((W(t) - W(s))W(s)) = s = t \wedge s,$$

puesto que los incrementos son independientes.  $\square$

Por supuesto, en el lema anterior se podría haber usado la expresión (27).

### 2.3. Construcción y existencia del movimiento browniano

Es posible construir explícitamente el movimiento browniano a partir de una suma infinita que involucra variables aleatorias  $\mathcal{N}(0, 1)$  y unas ciertas funciones reales. Sin embargo, es tedioso, y solo enunciaremos el teorema aquí (los detalles pueden verse en el Cap. 3 de [4]).

**Definición 2.5.** La familia  $\{h_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$  de *funciones de Haar* se define para  $0 \leq t \leq 1$  así:

$$h_0(t) := 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad h_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ -1, & 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Si  $2^n \leq k < 2^{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , definimos

$$h_k(t) = \begin{cases} 2^{n/2}, & \frac{k-2^n+1/2}{2^n} \leq t \leq \frac{k-2^n}{2^n}, \\ -2^{n/2}, & \frac{k-2^n+1/2}{2^n} < t \leq \frac{k-2^n+1}{2^n}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La  $k$ -ésima *función de Schauder*  $s_k(t)$  se define entonces como

$$s_k(t) := \int_0^t h_k(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

La Figura 2 muestra la gráfica de  $s_k(t)$ , para  $k = 1, \dots, 7$ .

**Teorema 2.6** (Construcción del movimiento browniano). Sea  $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$  una familia de variables aleatorias independientes  $\mathcal{N}(0, 1)$  definidas en el mismo espacio de probabilidad. Sea  $s_k(t)$  la  $k$ -ésima función de Schauder. Entonces

$$W(t, \omega) := \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\omega)s_k(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

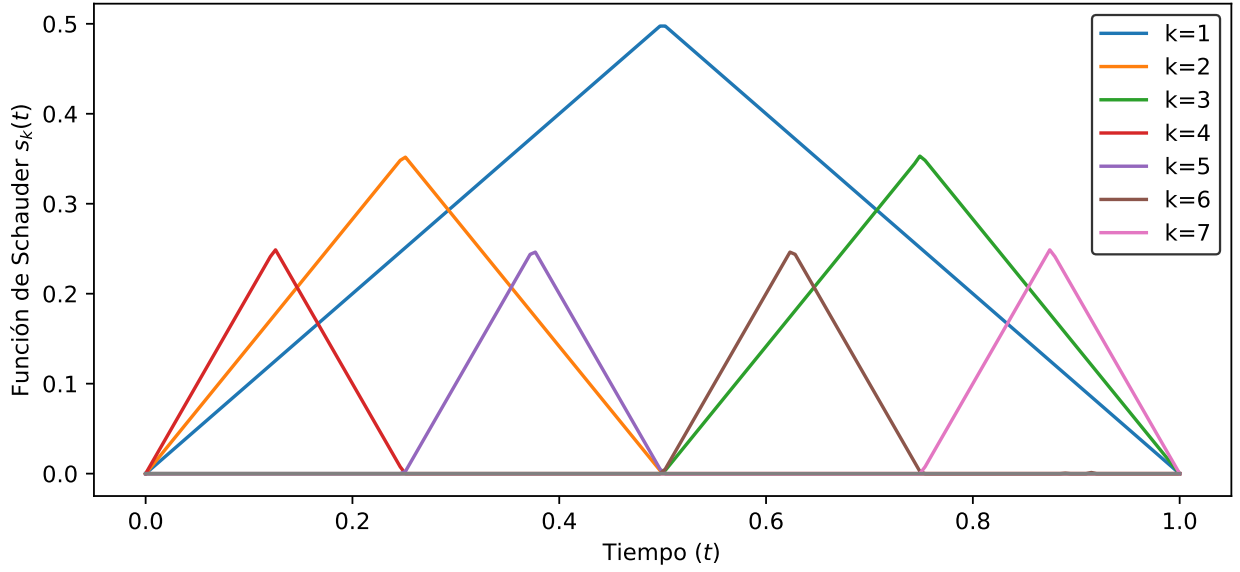


Figura 2: Gráfica de la función de Schauder  $s_k(t)$  para  $k = 1, \dots, 7$ . Nótese que, dado  $n$  tal que  $2^n \leq k < 2^{n+1}$  para cada  $k = 1, \dots$ , la gráfica tiene una altura de  $2^{-(n+2)/2}$  y anchura  $2^{-n}$ .

- a) converge uniformemente en  $t$  en c.t.p.,
- b)  $W(\cdot)$  es movimiento browniano en  $0 \leq t \leq 1$ ,
- c) la trayectoria  $t \mapsto W(t, \omega)$  es continua para casi todo  $\omega$ .

En las mismas hipótesis que en el teorema anterior, podemos asegurar la existencia de un proceso de Wiener en todo  $t$ .

**Teorema 2.7** (Existencia del movimiento browniano). Sea  $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$  una familia de variables aleatorias independientes  $\mathcal{N}(0, 1)$  definidas en el mismo espacio de probabilidad. Entonces, existe un movimiento browniano unidimensional  $W(\cdot)$  definido para  $\omega \in \Omega$ ,  $t \geq 0$ .

## 2.4. Continuidad y no diferenciabilidad de la trayectoria

**Definición 2.8.** Dado  $t \in [0, T]$ , la función  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice *Hölder continua en  $t$*  si existen constantes  $K > 0$  y  $\gamma \in (0, 1)$  tales que

$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|^\gamma, \quad \forall s \in [0, T].$$

Si  $f$  es Hölder continua en todo  $t \in [0, T]$ , se dice que  $f$  es *Hölder continua en  $[0, T]$* . Si  $\gamma = 1$ ,  $f$  se dice *Lipschitz continua en  $[0, T]$* .

Se desea estudiar la regularidad de las trayectorias del movimiento browniano, i.e. de la función

$$t \mapsto \mathbf{W}(t, \omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Para ello, se usa el siguiente importante teorema, debido a A. Kolmogorov (1903-1987). Véase el Apéndice de [4] para una demostración.

**Teorema 2.9.** Sea  $\mathbf{X}(\cdot)$  un proceso estocástico que satisface

$$E(|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(s)|^\beta) \leq C|t - s|^{1+\alpha} \quad (29)$$

para ciertas constantes  $\alpha, \beta, C > 0$ . Entonces existe un proceso  $\tilde{\mathbf{X}}(\cdot)$  que coincide en c.t.p. y en todo  $t$  con  $\mathbf{X}(\cdot)$ , tal que la trayectoria  $t \mapsto \tilde{\mathbf{X}}(t, \omega)$  es Hölder continua para  $0 < \gamma < \alpha/\beta$ , con  $\omega \in \Omega$ .

La consecuencia directa de el anterior teorema es:

**Teorema 2.10** (Hölder continuidad de la trayectoria browniana). Para casi todo  $\omega$  y para todo  $T > 0$ , la trayectoria  $t \rightarrow \mathbf{W}(t, \omega)$  es Hölder continua en  $[0, T]$  con  $0 < \gamma < 1/2$ .

*Demostración.* Sea  $\mathbf{W}(\cdot)$  un movimiento browniano  $n$ -dimensional y  $m \in \mathbb{N}^+$ . Entonces, llamando a  $r = t - s$ , y con el cambio de variable  $y = x/\sqrt{r}$ ,

$$\begin{aligned} E(|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(s)|^{2m}) &= \frac{1}{(2\pi r)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2m} e^{-\frac{|x|^2}{2r}} dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} r^m \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2m} e^{-\frac{|y|^2}{2}} dy = \\ &= Cr^m = C|t - s|^m, \end{aligned}$$

con  $C = E(\mathbf{Y}^{2m})$ ,  $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  de dimensión  $n$ , que existe y es finita. La desigualdad (29) del Teorema 2.9 se satisface para  $\beta = 2m$  y  $\alpha = m - 1$ , luego  $\mathbf{W}(\cdot)$  es Hölder continua para

$$0 < \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}, \quad m \in \mathbb{N}^+. \quad \square$$

Sin embargo, a pesar de que las trayectorias del movimiento browniano son *más que continuas* en casi todo punto (c.t.p.), no son diferenciables en casi ningún punto.

**Teorema 2.11.** a) Para casi todo  $\omega$  y si  $1/2 < \gamma \leq 1$ ,  $t \mapsto \mathbf{W}(t, \omega)$  no es Hölder continua en ningún tiempo  $t$ .

b) Para casi todo  $\omega$ ,  $t \rightarrow \mathbf{W}(t, \omega)$  no es diferenciable en ningún  $t$  y es de variación infinita en cada subintervalo.

*Demostración.* Sea  $\gamma \in (1/2, 1]$ . Basta demostrarlo para  $n = 1$  y  $T = 1$ . Sea  $t \in [0, 1]$  y

$$\Gamma = \{\omega \in \Omega \mid W(\omega, \cdot) \text{ es Hölder continua en algún } t\}.$$

Veamos que  $P(\Gamma) = 0$ , lo que probará (a). Sea pues  $\omega \in \Gamma$ . Sea  $N$  un entero tal que  $N(\gamma - 1/2) > 1$ . Sea  $n \gg 1$ ,  $i = [ns] + 1$ . Entonces, para  $j = i, i + 1, \dots, i + N - 1$ ,

$$\begin{aligned} \left| W\left(\frac{j}{n}\right) - W\left(\frac{i}{n}\right) \right| &\leq \left| W\left(\frac{j}{n}\right) - W\left(\frac{i}{n}\right) \right| + \left| W\left(\frac{i}{n}\right) - W\left(\frac{i+1}{n}\right) \right| \leq \\ &\leq K \left( \left| t - \frac{j}{n} \right|^\gamma + \left| t - \frac{i+1}{n} \right|^\gamma \right) \leq \frac{M}{n^\gamma}, \end{aligned}$$

para cierta constante  $M$ . Entonces

$$\omega \in A_{M,n}^i := \left\{ \left| W\left(\frac{j}{n}\right) - W\left(\frac{i}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{n^\gamma}, j = i, \dots, i + N - 1 \right\},$$

para cierto  $1 \leq i \leq n$ ,  $M \geq 1$  y para todo  $n \gg 1$ . De este modo,

$$\Gamma \subset \bigcup_{k, M=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n A_{M,n}^i.$$

Ahora bien, para todo  $k$  y  $M$ ,

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n A_{M,n}^i\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_{M,n}^i\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_{M,n}^i) \leq n(P(|W(\frac{1}{n})| \leq \frac{M}{n^\gamma}))^N,$$

la última desigualdad se tiene por incrementos independientes y estacionarios. Como

$$P(|W(\frac{1}{n})| \leq \frac{M}{n^\gamma}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-Mn^{1/2-\gamma}}^{Mn^{1/2-\gamma}} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx = \{y = \sqrt{nx}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-Mn^{1/2-\gamma}}^{Mn^{1/2-\gamma}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \leq Cn^{1/2-\gamma},$$

tenemos que

$$P\left(\bigcup_{k,M=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n A_{M,n}^i\right) \leq \sum_{M,k=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n A_{M,n}^i\right) \leq \sum_{k,M=1}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} nC'[n^{1/2-\gamma}]^N = 0$$

ya que  $N(\gamma - 1/2) > 1$ . En consecuencia,  $P(\Gamma) = 0$ .

Si  $t \rightarrow W(t, \omega)$  fuera diferenciable en  $t$ , por el Teorema del Valor Medio sería Lipschitz continua, lo cual es absurdo en casi todo  $\omega$ . Si  $W(t, \omega)$  fuera de variación finita en un subintervalo, sería diferenciable en casi todo  $t$  en ese intervalo, lo que no ocurre en casi todo  $\omega$ .  $\square$

## 2.5. Propiedad de Markov

**Definición 2.12.** Sea  $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ , y  $\mathcal{V}$  una  $\sigma$ -álgebra contenida en  $\mathcal{U}$ . Dada una variable aleatoria  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  integrable, denotamos por  $E(X|\mathcal{V})$  a la variable aleatoria dada por

$$\int_A X dP = \int_A E(X|\mathcal{V}) dP, \quad \forall A \in \mathcal{V}.$$

Si  $\mathcal{V} = \mathcal{U}(Y)$  para cierta variable aleatoria  $Y$ , escribimos  $E(X|Y)$ .

Nótese que  $E(X|\mathcal{V})$  es una v.a. que se interpreta como una estimación de  $X$ , cuando disponemos de la información dada por la observación sobre  $\mathcal{V}$ .

**Definición 2.13.** Dado  $A \in \mathcal{U}$ , llamamos  $\chi_A$  a la función característica de  $A$ . Si  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ , denotamos

$$P(A|\mathcal{V}) := E(\chi_A|\mathcal{V}), \quad A \in \mathcal{U},$$

y la llamamos *probabilidad condicionada* de  $A$ , dada  $\mathcal{V}$ . Es de nuevo una variable aleatoria.

**Definición 2.14.** La  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{U}(s) := \mathcal{U}(\mathbf{X}(r) | 0 \leq r \leq s)$  se denomina *historia* del proceso  $\mathbf{X}(\cdot)$  hasta el tiempo  $s$ .

Representa toda la información proporcionada al observar el proceso hasta tiempo  $s$ .

**Teorema 2.15.** Sea  $\mathbf{W}(\cdot)$  movimiento browniano  $n$ -dimensional. Entonces  $\mathbf{W}(\cdot)$  es un proceso de Markov, i.e.

$$P(\mathbf{W}(t) \in B | \mathcal{U}(s)) = P(\mathbf{W}(t) \in B | \mathbf{W}(s)), \quad c.t.p.,$$

para todo  $0 \leq s \leq t$  y todo subconjunto boreliano  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Una demostración está en [4], Cap.3. Es decir, a la hora de calcular probabilidades, conocer el proceso en  $\mathbf{W}(s)$  te da la misma información que conocerlo en todos los valores anteriores a  $s$ . El movimiento browniano solo conoce su valor en  $s$  y no especifica cómo llegó allí. La propiedad de Markov explica informalmente la no diferenciabilidad de  $t \rightarrow \mathbf{W}(t, \omega)$ . Si  $\mathbf{W}(s, \omega) = b$ , el proceso no recuerda de qué forma se aproxima a  $b$ , luego no es posible decir cuánto vale la tangente en ese punto  $s$ .

### 3. La Integral de Itô

El objetivo de esta sección es definir la integral estocástica  $\int_0^t \mathbf{G}(s, \mathbf{X}(s)) d\mathbf{W}$ , para dotar de sentido a (3). Hay varias posibilidades, como la integral de Itô o la integral de Stratonovich, que dan lugar a formalismos distintos. Nosotros desarrollamos la integral de Itô. Una vez hecho esto, a partir de la ecuación integral (3) se definirá la correspondiente diferencial estocástica, y desarrollaremos técnicas de este nuevo cálculo, centralizadas en la regla de la cadena de Itô.

En adelante, denotamos como  $\mathbf{W}(\cdot)$  a un cierto movimiento browniano  $m$ -dimensional.

#### 3.1. Definiciones preliminares

**Definición 3.1.** Definimos el *futuro* de  $\mathbf{W}(\cdot)$  tras  $t$  como  $\mathcal{W}^+(t) := \mathcal{U}(\mathbf{W}(s) - \mathbf{W}(t) | s \geq t)$ . Denotamos a la historia de  $\mathbf{W}(\cdot)$  hasta  $t$  como  $\mathcal{W}(t) = \mathcal{U}(\mathbf{W}(s) | 0 \leq s \leq t)$ .

**Definición 3.2.** Una familia  $\mathcal{F}(\cdot)$  de  $\sigma$ -álgebras contenidas en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{U}$  se llama *filtración* de  $\mathbf{W}(\cdot)$  si

- a)  $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{F}(s)$ ,  $t \geq s \geq 0$ ,
- b)  $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{W}(s)$ ,  $t \geq 0$ ,
- c)  $\mathcal{F}(t)$  es independiente de  $\mathcal{W}^+(t)$ ,  $t \geq 0$ .

**Definición 3.3.** Sea  $\mathcal{B}_{[0,t]}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $[0, t]$ . Dado  $t \geq 0$ , denotamos  $\mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}(t)$  a la  $\sigma$ -álgebra generada por la familia de conjuntos  $\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{B}_{[0,t]}, A_2 \in \mathcal{F}(t)\}$ . Entonces, el proceso  $\mathbf{G}(\cdot) = (G^{ij}(\cdot))$  que toma valores en  $\mathbb{M}^{n \times m}$ , se dice *progresivamente medible* si, para todo  $t \geq 0$ , la aplicación  $(s, \omega) \rightarrow \mathbf{G}(s, \omega)$  es  $\mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}(t)$  medible.

Esto significa, por un lado, que  $G(\cdot)$  depende solo de la información disponible en  $\mathcal{F}$ , y por otro, que es apropiadamente medible en las variables  $t$  y  $\omega$  conjuntamente.

**Definición 3.4.** a) Se dice que  $\mathbf{G} = (G^{ij}) \in \mathbb{L}_{n \times m}^2(0, T)$  cuando para todo  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $G^{ij}$  es progresivamente medible, y

$$E \left( \int_0^T (G^{ij})^2 dt \right) < \infty.$$

- b) Se dice que el proceso (que toma valores en  $\mathbb{R}^n$ ),  $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^n) \in \mathbb{L}_n^1(0, T)$  cuando para todo  $i = 1, \dots, n$ ,  $F^i$  es progresivamente medible, y

$$E \left( \int_0^T |F^i| dt \right) < \infty.$$

El objetivo es definir la integral de Itô cuando  $n = m = 1$ , para luego extender su definición de forma natural. Sea por tanto  $n = m = 1$ .

**Definición 3.5.** Un proceso  $G \in \mathbb{L}_{1 \times 1}^2(0, T) \equiv \mathbb{L}^2(0, T)$  se denomina *proceso escalonado* si existe una partición  $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T\}$  tal que

$$G(t) \equiv G_k, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} \quad (k = 0, \dots, m-1).$$

Nótese que  $G_k$  es una variable aleatoria, y es  $\mathcal{F}(t_k)$  medible.

### 3.2. Definición de la integral de Itô

Definimos la integral de Itô de manera progresiva, de modo similar a la integral de Riemann. Comenzamos con procesos escalonados, que son el análogo de las funciones constantes a trozos en la integral de Riemann.

**Definición 3.6.** Sea  $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$  un proceso escalonado. Entonces,

$$\int_0^T G dW := \sum_{k=0}^{m-1} G_k (W(t_{k+1}) - W(t_k)) \quad (30)$$

se denomina *Integral de Itô* del proceso escalonados  $G$  en  $(0, T)$ .

Nótese que es una variable aleatoria. El lema que sigue permite definir la integral de Itô en general, mediante un adecuado paso al límite.

**Lema 3.7.** Dado  $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ , existe una sucesión de procesos escalonado acotados  $G^n \in \mathbb{L}^2(0, T)$  tal que

$$E \left( \int_0^T |G - G^n|^2 dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Definición 3.8.** Sea  $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ . Sea  $G^n \in \mathbb{L}^2(0, T)$  como en el lema anterior. Entonces

$$\int_0^T G dW := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T G^n dW \quad (31)$$

se denomina *Integral de Itô* de  $G$  en  $(0, T)$ .

Una vez definida la Integral de Itô en el caso unidimensional, extendemos la definición de manera natural para el caso multidimensional.

**Definición 3.9.** Si  $\mathbf{G} \in \mathbb{L}_{n \times m}^2(0, T)$ , entonces

$$\left( \int_0^T \mathbf{G} d\mathbf{W} \right)_i := \int_0^T G^{ij} dW^j.$$

se denomina *integral de Itô* de  $\mathbf{G} = (G^{ij})$  en  $(0, T)$ .

De nuevo, al igual en las definiciones precedentes, es una variable aleatoria, pero en este caso toma valores en  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.3. Propiedades de la integral de Itô

**Teorema 3.10.** Si  $\mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathbb{L}_{n \times m}^2(0, T)$ , entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

a) *Linealidad.*

$$\int_0^T (a\mathbf{G} + b\mathbf{H}) d\mathbf{W} = a \int_0^T \mathbf{G} d\mathbf{W} + b \int_0^T \mathbf{H} d\mathbf{W},$$

b) *Esperanza nula.*

$$E \left( \int_0^T \mathbf{G} d\mathbf{W} \right) = 0,$$

c) *Isometría de Itô.*

$$E \left( \left| \int_0^T \mathbf{G} d\mathbf{W} \right|^2 \right) = E \left( \int_0^T |\mathbf{G}|^2 dt \right), \quad |\mathbf{G}|^2 := G^{ij} G^{ij}.$$

*Demostración.* Sean primeramente  $G, H \in \mathbb{L}^2(0, T)$  procesos escalonados

- a)  $\int_0^T (aG + bH) dW = \sum_{k=0}^{m-1} (aG_k + bH_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)) = a \sum_{k=0}^{m-1} G_k(W(t_{k+1}) - W(t_k)) + b \sum_{k=0}^{m-1} H_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))$ , obteniendo (a).
- b)  $G_k$  es  $\mathcal{F}(t_k)$ -medible, y  $W(t_{k+1}) - W(t_k)$  es  $\mathcal{W}^+(t_k)$ -medible. Como  $\mathcal{F}(\cdot)$  es una filtración,  $\mathcal{F}(t_k)$  es independiente de  $\mathcal{W}^+(t_k)$ . Luego  $G_k$  es independiente de  $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ , y

$$E \left( \int_0^T G dW \right) = \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))) = \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k)E(W(t_{k+1}) - W(t_k)) = 0.$$

- c) Sea  $\mathbf{G}$  un proceso escalonado matricial, i.e.  $G^{ij}$  es un proceso escalonado para cada  $i, j$ . Entonces, sobreentendiendo la suma en los superíndices y explicitándola en los subíndices, se tiene

$$E \left( \left| \int_0^T \mathbf{G} d\mathbf{W} \right|^2 \right) = \sum_{k,j=0}^{m-1} E(G_k^{ir} G_j^{il} (W^r(t_{k+1}) - W^r(t_k))(W^l(t_{j+1}) - W^l(t_j))).$$

Por el mismo argumento que en el apartado anterior, y teniendo en cuenta la independencia entre las componentes del movimiento browniano, si  $j < k$ ,  $G_k^{ir} G_j^{il} (W^l(t_{j+1}) - W^l(t_j))$  es independiente de  $W^r(t_{k+1}) - W^r(t_k)$ . Así,

$$\begin{aligned} & E(G_k^{ir} G_j^{il} (W^r(t_{k+1}) - W^r(t_k))(W^l(t_{j+1}) - W^l(t_j))) = \\ & = E(G_k^{ir} G_j^{il} (W^l(t_{j+1}) - W^l(t_j))) E(W^r(t_{k+1}) - W^r(t_k)) = 0. \end{aligned}$$

Si  $k > j$ , ocurre lo mismo. Por ende, de nuevo por las propiedades del movimiento browniano multidimensional,

$$\begin{aligned} E \left( \left| \int_0^T \mathbf{G} d\mathbf{W} \right|^2 \right) &= \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^{ir} G_k^{il} (W^r(t_{k+1}) - W^r(t_k))(W^l(t_{k+1}) - W^l(t_k))) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^{ir} G_k^{il}) E((W^r(t_{k+1}) - W^r(t_k))(W^l(t_{k+1}) - W^l(t_k))) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^{il} G_k^{il}) (t_{k+1} - t_k) = E \left( \int_0^T |\mathbf{G}|^2 dt \right). \end{aligned}$$

Ahora, si  $G, H \in \mathbb{L}^2(0, T)$ , a) y b) se obtienen fácilmente usando procesos escalonados y tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$ . Cuando  $\mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathbb{L}_{n \times m}^2$ , a) y b) son muy fáciles de ver cuando se escriben componente a componente y se usan estas propiedades para el caso unidimensional, mientras que para c) se usa el resultado para procesos escalonados matriciales y se hace un paso al límite.  $\square$



Usando la propiedad (c) del anterior lema para procesos escalonados, podemos ver que (31) está bien definida. En efecto, el límite en (31) existe en  $L^2(\Omega)$ , el espacio de variables aleatorias  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  tales que  $E(X^2) < \infty$ . En efecto,

$$E \left( \left( \int_0^T (G^n - G^m) dW \right)^2 \right) = E \left( \int_0^T (G^n - G^m)^2 dt \right) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0,$$

con lo que  $\{\int_0^T G^n dW\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión de Cauchy en  $L^2(\Omega)$ , luego convergente.

**Teorema 3.11.** Si  $\mathbf{G} \in \mathbb{L}_{n \times m}^2(0, T)$  es continuo en  $[0, T]$  en casi todo  $\omega$ , entonces

$$\int_0^T \mathbf{G} d\mathbf{W} = \lim_{|P^n| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{m_n-1} \mathbf{G}(t_k^n) (\mathbf{W}(t_{k+1}^n) - \mathbf{W}(t_k^n)), \quad (32)$$

donde  $P^n = \{0 = t_0^n < \dots < t_{m_n}^n = T\}$  es cualquier sucesión de particiones tales que  $|P^n| \rightarrow 0$ .

*Demostración.* Consideremos procesos escalonados (matriciales) dados por

$\mathbf{G}^n(s) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \mathbf{G}(t_k^n) I_{[t_k^n, t_{k+1}^n)}(s)$ . Entonces,

$$\int_0^t \mathbf{G}^n d\mathbf{W} = \sum_{k=0}^{m_n-1} \mathbf{G}(t_k^n) (\mathbf{W}(t_{k+1}^n) - \mathbf{W}(t_k^n)). \quad (33)$$

Además, por la continuidad de  $\mathbf{G}(\cdot)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left( \int_0^t |\mathbf{G}(s) - \mathbf{G}^n(s)|^2 ds \right) = 0,$$

en casi todo  $\omega$ , por lo que se puede tomar el límite en (33) para obtener el resultado, con probabilidad 1.  $\square$

La expresión (32) para la integral de Itô pone de manifiesto la gran analogía que hay con respecto a la integral de Riemann. A continuación, mostramos que, en media, la integral de Itô de un producto es el producto de las integrales de Itô. Esta propiedad no es en general válida cuando las integrales involucradas son de Riemann.

**Corolario 3.12.** Si  $G, H \in \mathbb{L}^2(0, T)$ , entonces

$$E \left( \int_0^T G dW \int_0^T H dW \right) = E \left( \int_0^T GH dW \right).$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} 2E \left( \int_0^T G dW \int_0^T H dW \right) &= \\ &= E \left( \left( \int_0^T (G + H) dW \right)^2 \right) - E \left( \left( \int_0^T G dW \right)^2 \right) - E \left( \left( \int_0^T H dW \right)^2 \right) = \\ &= E \left( \int_0^T (G + H)^2 dt \right) - E \left( \int_0^T G^2 dt \right) - E \left( \int_0^T H^2 dt \right) = 2E \left( \int_0^T GH dt \right). \end{aligned}$$

En la primera igualdad usamos la linealidad de la integral de Itô y que  $2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$ , y en la segunda, (c) del Teorema 3.10.  $\square$

Antes de seguir, considerando  $W$  un movimiento browniano unidimensional, utilizamos la definición (32) para calcular las integrales  $\int_0^T W dW$ , y  $\int_0^T t dW + \int_0^T W dt$ . El cálculo es ilustrativo y será de utilidad más adelante. Necesitamos el siguiente resultado:

**Lema 3.13** (Variación cuadrática). *Para una partición  $P^n = \{0 = t_0^n < \dots < t_{m_n}^n = T\}$  del intervalo  $[a, b]$  t.q.  $|P^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , se tiene que*

$$Q_n = \sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b - a, \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

*Demostración.*  $Q_n - (b - a) = \sum_{k=0}^{m_n-1} ((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n))$ . Entonces,

$$\begin{aligned} E((Q_n - (b - a))^2) &= \sum_{k,j=0}^{m_n-1} E(((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)) \times \\ &\quad \times ((W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n))) = \sum_{k=0}^{m_n-1} E((Y_k^2 - 1)^2 (t_{k+1}^n - t_k^n)^2), \end{aligned}$$

donde  $Y_k = Y_k^n := \frac{W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)}{\sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Se ha tenido en cuenta que  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ , así que los términos  $j \neq k$  se anulan. En definitiva, para cierta constante  $C$ ,

$$E((Q_n - (b - a))^2) \leq C \sum_{k,j=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \leq C |P^n| (b - a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

**Lema 3.14.** *Si  $W$  es un movimiento browniano unidimensional, entonces,*

$$\int_0^T W dW = \frac{W(T)^2}{2} - \frac{T}{2}, \quad (34)$$

$$\int_0^T t dW + \int_0^T W dt = TW(T). \quad (35)$$

*Demostración.* Sea  $P^n$  una partición en  $[0, T]$  t.q.  $|P^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

a) Sea  $R_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} W(t_k^n)(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))$ . Se tiene,

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{W(T)^2}{2} + \sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_k^n)W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)^2) - W(T)^2 = \\ &= \frac{W(T)^2}{2} + \sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_k^n)W(t_{k+1}^n) - W(t_{k+1}^n)^2 - W(t_k^n)^2) = \\ &= \frac{W(T)^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{W(T)^2}{2} - \frac{T}{2}, \end{aligned}$$

por el lema de variación cuadrática. De acuerdo con (32), esta última expresión es la integral de Itô de  $W$  en  $[0, T]$ .

b) Por un lado, en  $L^2(\Omega)$  es

$$\int_0^T t dW = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} t_k^n (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)),$$

y por otro lado, la definición de la integral de Riemann permite escribir

$$\int_0^T W dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} W(t_{k+1}^n) (t_{k+1}^n - t_k^n).$$

Por lo que

$$\int_0^T t dW + \int_0^T W dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n W(t_{k+1}^n) - t_k^n W(t_k^n)) = TW(T). \quad \square$$

### 3.4. Diferenciales estocásticas

Ahora que ya disponemos de la integral estocástica, podemos definir a partir de ella la diferencial estocástica

**Definición 3.15.** Si  $\mathbf{X}(\cdot) = (X^1(\cdot), \dots, X^n(\cdot))$  es un proceso estocástico en  $\mathbb{R}^n$  satisfaciendo

$$\mathbf{X}(r) = \mathbf{X}(s) + \int_s^r \mathbf{F} dt + \int_s^r \mathbf{G} d\mathbf{W},$$

para cierta  $\mathbf{F} \in \mathbb{L}_n^1(0, T)$ ,  $\mathbf{G} \in \mathbb{L}_{n \times m}^2$ , y para todo  $0 \leq s \leq r \leq T$ , se dice que  $\mathbf{X}(\cdot)$  tiene la *diferencial estocástica*

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F} dt + \mathbf{G} d\mathbf{W}. \quad (36)$$

esto es

$$dX^i = F^i dt + G^{ij} dW^j.$$

Nótese que los símbolos diferenciales son únicamente una forma de abreviar la expresión integral: estrictamente hablando,  $d\mathbf{X}$ ,  $dt$  y  $d\mathbf{W}$  no tienen significado por sí solos.

Un resultado inmediato a partir de esta definición y de (34) del Lema 3.14 es el siguiente:

**Lema 3.16.** Si  $\mathbf{W}$  es un movimiento browniano  $m$ -dimensional, se cumple que

$$d(W^j W^k) = W^j dW^k + W^k dW^j + \delta_{jk} dt, \quad j, k = 1, \dots, m, \quad (37)$$

o equivalentemente,

$$\int_0^r W^k dW^j + \int_0^r W^j dW^k = W^j(r) W^k(r) - \delta_{jk} r, \quad j, k = 1, \dots, m, \quad 0 \leq r \leq T. \quad (38)$$

*Demostración.* Consideremos un proceso de Wiener  $W(\cdot)$  en una dimensión, entonces,

$$W^2(r) = r + 2 \left( \frac{W^2(r)}{2} - \frac{r}{2} \right) = \int_0^r dt + \int_0^r 2W dW, \quad r \in [0, T],$$

y por la definición de diferencial estocástica,  $d(W^2) = 2WdW + dt$ . Ahora, si  $\bar{W}$  es un movimiento browniano independiente de  $W$ , entonces  $d(W\bar{W}) = Wd\bar{W} + \bar{W}dW$ . En efecto, sea  $X(t) = \frac{W(t) + \bar{W}(t)}{\sqrt{2}}$ . Primero,  $X(0) = 0$ , c.t.p. Segundo,  $X(\cdot)$  tiene incrementos independientes, porque  $W$  y  $\bar{W}$  lo tienen, y son v.a. independientes. Tercero, tiene incrementos estacionarios normales, pues  $X(t) - X(s)$  es suma de dos v.a. independientes  $N\left(0, \frac{t-s}{2}\right)$ . Así,  $X(\cdot)$  es movimiento browniano unidimensional, y entonces

$$\begin{aligned} d(W\bar{W}) &= d(X^2 - \frac{W^2}{2} - \frac{\bar{W}^2}{2}) = 2XdX + dt - \frac{1}{2}(2WdW + dt) - \frac{1}{2}(2\bar{W}d\bar{W} + dt) = \\ &= (W + \bar{W})(dW + d\bar{W}) - WdW - \bar{W}d\bar{W} = Wd\bar{W} + \bar{W}dW. \end{aligned}$$

Uniendo estos dos resultados, de la independencia de las componentes del  $\mathbf{W}$  se deduce (37), y por ende (38).  $\square$

### 3.5. Lema de Itô

Si se realiza una transformación  $u(\mathbf{X}(t), t)$  del proceso  $\mathbf{X}(\cdot)$ , que satisface la diferencial estocástica (36), nos preguntamos cuál será la diferencial estocástica de  $u$ . Denotemos  $u_t$  a la derivada parcial de  $u$  respecto de  $t$ , y  $u_i$  a la derivada respecto de  $x_i$ . Las derivadas parciales sucesivas se denotan de igual forma. A menudo se denota  $X^i$  con subíndices, y para que no haya confusión, nunca  $X_i$  significará derivada parcial respecto de  $x_i$ . El resultado central de esta sección es el siguiente:

**Teorema 3.17** (Regla de la cadena de Itô). *Supongamos que  $\mathbf{X}(\cdot)$  tiene la diferencial estocástica*

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}dt + \mathbf{G}d\mathbf{W}.$$

Sea  $u : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, con derivadas parciales  $u_t, u_i, u_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  continuas. Entonces

$$d(u(\mathbf{X}(t), t)) = u_t dt + u_i dX^i + \frac{1}{2} u_{ij} G^{il} G^{jl} dt. \quad (39)$$

El argumento de las derivadas parciales de  $u$  es  $(\mathbf{X}(t), t)$ . El resultado se conoce también como *Lema de Itô*. El término  $\frac{1}{2} u_{ij} G^{il} G^{jl} dt$  se llama *término de Itô*.

*Demostración.* 1)  $u = x_1 x_2$  (Regla del producto de Itô).

Reescribimos

$$\begin{cases} dX_1 = F^1 dt + G^{1k} dW^k \\ dX_2 = F^2 dt + G^{2k} dW^k \end{cases} \quad (0 \leq t \leq T),$$

y veamos que

$$d(X_1 X_2) = X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + G^{1k} G^{2k} dt. \quad (40)$$

a) Sea  $0 \leq r \leq T$ . Primero, supongamos que  $X_1(0) = X_2(0) = 0$ ,  $F^i(t) \equiv F^i$ ,  $G^{ik} \equiv G^{ik}$ , donde  $F^i, G^{ik}$  v.a. son independientes del tiempo,  $\mathcal{F}(0)$ -medibles,  $i = 1, 2$ . Entonces,

$$X_i(t) = F^i t + G^{ik} W^k(t), \quad (t \geq 0, i = 1, 2).$$

Luego

$$\begin{aligned}
& \int_0^r X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G^{1k} G^{2k} dt = \\
& = \int_0^r (X_1 F^2 + X_2 F^1) dt + \int_0^r (X_1 G^{2k} + X_2 G^{1k}) dW^k + \int_0^r G^{1k} G^{2k} dt = \\
& = \int_0^r ((F^1 t + G^{1k} W^k) F_2 + (F^2 t + G^{2k} W^k) F^1) dt + \\
& + \int_0^r ((F^1 t + G^{1j} W^j) G^{2k} + (F^2 t + G^{2j} W^j) G^{1k}) dW^k + G^{1k} G^{2k} r = \\
& = F^1 F^2 r^2 + (G^{1k} F^2 + G^{1k} F^1) \left( \int_0^r W^k dt + \int_0^r t dW^k \right) + G^{1j} G^{2k} \left( \int_0^r W^k dW^j + \int_0^r W^j dW^k \right) \\
& = F^1 F^2 r^2 + (G^{1k} F^2 + G^{2k} F^1) r W^k(r) + G^{1j} G^{2k} W^j(r) W^k(r) = \\
& = (F^1 r + G^{1k} W^k(r)) (F^2 r + G^{2j} W^j(r)) = X^1(r) X^2(r).
\end{aligned}$$

La penúltima igualdad procede del Lema 3.14 y el Lema 3.16. El caso en que  $s \geq 0$ ,  $X_1(s)$  y  $X_2(s)$  son arbitrarios, y  $F^i$  y  $G^{ik}$  son constantes y  $\mathcal{F}(s)$ -medibles tiene una prueba similar.

b) Si  $F_i, G_i$  son procesos escalonados, se aplica el paso (a) en cada subintervalo  $[t_k, t_{k+1}]$  y sumamos las integrales resultantes.

c) En general, tomamos procesos escalonados  $F_n^i \in \mathbb{L}^1(0, T)$ ,  $G_n^{ik} \in \mathbb{L}^2(0, T)$ , tal que  $E(\int_0^T |F_n^i - F^i| dt) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $E(\int_0^T |G_n^{ik} - G^{ik}| dt) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , para  $i = 1, 2$  y  $k = 1, \dots, m$ . Definimos

$$X_{i,n}(t) := X_i(0) + \int_0^t F_n^i ds + \int_0^t G_n^{ik} dW^k, \quad i = 1, 2,$$

aplicamos el paso (b) a  $X_{i,n}(\cdot)$  en  $(s, r)$  y tomamos el límite en  $n$ , obteniendo

$$X_1(r) X_2(r) = X_1(s) X_2(s) + \int_s^r X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + G_1^k G_2^k dt,$$

por lo que se satisface (40).

II)  $u = x_i^m$ ,

con  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Veamos que, entonces,

$$d(u(\mathbf{X}, t)) = d(X_i^m) = m X_i^{m-1} dX + \frac{1}{2} m(m-1) X_i^{m-2} G^{il} G^{il} dt. \quad (41)$$

Cuando  $m = 0, 1$  es claro, y para  $m = 2$  se sigue de la regla del producto de Itô (40). Supuesto cierto para  $m - 1$ , escribimos

$$d(X_i^{m-1}) = (m-1) X_i^{m-2} (F^i dt + G^{il} dW^l) + \frac{1}{2} (m-1)(m-2) X_i^{m-3} G^{il} G^{il} dt,$$

y lo probamos para  $m$ :

$$\begin{aligned}
d(X_i^m) &= d(X_i^{m-1} X) = X_i d(X_i^{m-1}) + X_i^{m-1} dX + (m-1) X_i^{m-2} G^{il} G^{il} dt = \\
&= X_i \left( (m-1) X_i^{m-2} dX + \frac{1}{2} (m-1)(m-2) X_i^{m-3} G^{il} G^{il} dt \right) + \\
&+ (m-1) X_i^{m-2} G^{il} G^{il} dt + X_i^{m-1} dX = \\
&= m X_i^{m-1} dX + \frac{1}{2} m(m-1) X_i^{m-2} G^{il} G^{il},
\end{aligned}$$

pues  $m - 1 + \frac{1}{2} (m-1)(m-2) = \frac{1}{2} m(m-1)$ .

III)  $u = x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}$ .

Para  $m = 0$  es obvio, y para  $m = 1$  es el paso II). Para  $m = 2$ , reescribimos (41) como  $d(X_i^k) = \{..\}dt + H^{il}dW^l$ , con  $H^{il} = kX_i^{k-1}G^{il}$ . Si  $Y_1 := X_1^{k_1}$ ,  $Y_2 := X_2^{k_2}$ , por esto y por la regla del producto tenemos

$$\begin{aligned} d(X_1^{k_1}X_2^{k_2}) &= d(Y_1Y_2) = Y_1dY_2 + Y_2dY_1 + H^{1l}H^{2l}dt = \\ &= k_2X_1^{k_1}X_2dX_2 + \frac{1}{2}k_2(k_2-1)X_1^{k_1}X_2^{k_2-2}G^{2l}G^{2l}dt + \{1 \leftrightarrow 2\} + \\ &+ k_1k_2X_1^{k_1-1}X_2^{k_2-1}G^{1l}G^{2l}dt, \end{aligned}$$

que es justo lo que se obtiene con (39).

Sea  $\hat{u} = x_1^{k_1} \dots x_{m-1}^{k_{m-1}}$ . Supongamos válida la fórmula para  $\hat{u}$ , i.e.

$$d\hat{u} = \hat{u}_i dX_i + \frac{1}{2}\hat{u}_{ij}G^{il}G^{jl}dt = \{..\}dt + \hat{u}_i G^{il}dW^l.$$

Por la regla del producto y la hipótesis de inducción, se tiene

$$\begin{aligned} du &= d(\hat{u}X_m^{k_m}) = X_m^{k_m}d\hat{u} + \hat{u}d(X_m^{k_m}) + H^{ml}\hat{u}_iG^{il}dt = \hat{u}_iX_m^{k_m}dX_i + \frac{1}{2}\hat{u}_{ij}X_m^{k_m}G^{il}G^{jl}dt + \\ &+ \underbrace{k_m\hat{u}X_m^{k_m-1}}_{u_m}dX_m + \underbrace{\frac{1}{2}k_m(k_m-1)\hat{u}X_m^{k_m-2}}_{u_{mm}}dt + \underbrace{k_m\hat{u}_iX_m^{k_m-1}}_{u_{im}}G^{il}G^{ml}dt = \\ &= u_i dX_i + \frac{1}{2}u_{ij}G^{il}G^{jl}dt, \end{aligned}$$

ya que claramente  $\hat{u}_iX_m^{k_m} = u_i$  y  $\hat{u}_{ij}X_m^{k_m} = u_{ij}$ .

IV)  $u =$  polinomio en  $x$ .

Como la diferencial estocástica es lineal, y la regla de la cadena se satisface para monomios, también se satisface para polinomios en la variable  $x = (x_1, \dots, x_m)$ .

V)  $u =$  polinomio en  $x, t$ .

(39) es válida para la suma finita  $u(x, t) = f^k(x)g^k(t)$ , donde  $f^k$  y  $g^k$  son polinomios. Basta verlo para  $u = f(x)g(t)$ , por la linealidad de la diferencial. Así,

$$\begin{aligned} d(u(\mathbf{X}, t)) &= d(f(\mathbf{X})g) = f(\mathbf{X})dg + gdf(\mathbf{X}) = fg'dt + g\left(f_i dX_i + \frac{1}{2}f_{ij}G^{il}G^{jl}dt\right) = \\ &= u_t dt + u_i dX_i + \frac{1}{2}u_{ij}G^{il}G^{jl}dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto, es válida para polinomios en  $x, t$ .

VI)  $u = u(x, t)$  en general.

Dado  $u$  como en el enunciado, existe una sucesión de polinomios  $u^n$  tales que

$$u^n \rightarrow u, \quad u_t^n \rightarrow u_t, \quad u_i^n \rightarrow u_i, \quad u_{ij}^n \rightarrow u_{ij}, \quad n \rightarrow \infty,$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ . Por el paso anterior, sabemos que para todo  $0 \leq r \leq T$ ,

$$u^n(\mathbf{X}(r), r) - u^n(\mathbf{X}(0), 0) = \int_0^r \left(u_t^n + u_i^n F^i + \frac{1}{2}u_{ij}^n G^{il}G^{jl}\right) dt + \int_0^r u_i^n G^{il}dW^l, \quad \text{ctp.}$$

Tomado límite para  $n \rightarrow \infty$ , la expresión anterior es cierta para  $u$ , probando la regla de la cadena de Itô en general.  $\square$

## 4. Ecuaciones diferenciales estocásticas

### 4.1. Definiciones y ejemplos

**Definición 4.1.** Sean  $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^{n \times m}$ . Sea  $\mathbf{W}(\cdot)$  movimiento browniano  $m$ -dimensional y  $\mathbf{X}_0$  variable aleatoria  $n$ -dimensional independiente de  $\mathbf{W}(\cdot)$ . Consideremos la filtración  $\mathcal{F}(\cdot)$  dada por  $\mathcal{F}(t) := \mathcal{U}(\mathbf{W}(s) \ (0 \leq s \leq t), \mathbf{X}_0)$ . Decimos que el proceso estocástico  $\mathbf{X}(\cdot)$  que toma valores en  $\mathbb{R}^n$  es *solución de la ecuación diferencial estocástica de Itô* (EDE)

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)d\mathbf{W}, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \quad (42)$$

para  $0 \leq t \leq T$  cuando

- a)  $\mathbf{X}(\cdot)$  es progresivamente medible respecto de  $\mathcal{F}(\cdot)$ .
- b)  $\mathbf{b}(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{L}_n^1(0, T)$ ,
- c)  $\mathbf{B}(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{L}_{n \times m}^2(0, T)$ , y
- d) para todo  $0 \leq t \leq T$ ,

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}(s), s)ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}(s), s)d\mathbf{W}, \text{ para ctp. } \omega \in \Omega.$$

Obsérvese que mediante

$$d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X^2 \\ \vdots \\ f(t, X^1, \dots, X^n) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} X^2 \\ \vdots \\ g(t, X^1, \dots, X^n) \end{pmatrix} d\mathbf{W}, \quad \text{donde } \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} X^1(t) \\ \vdots \\ X^n(t) \end{pmatrix},$$

podemos describir EDEs de orden superior.

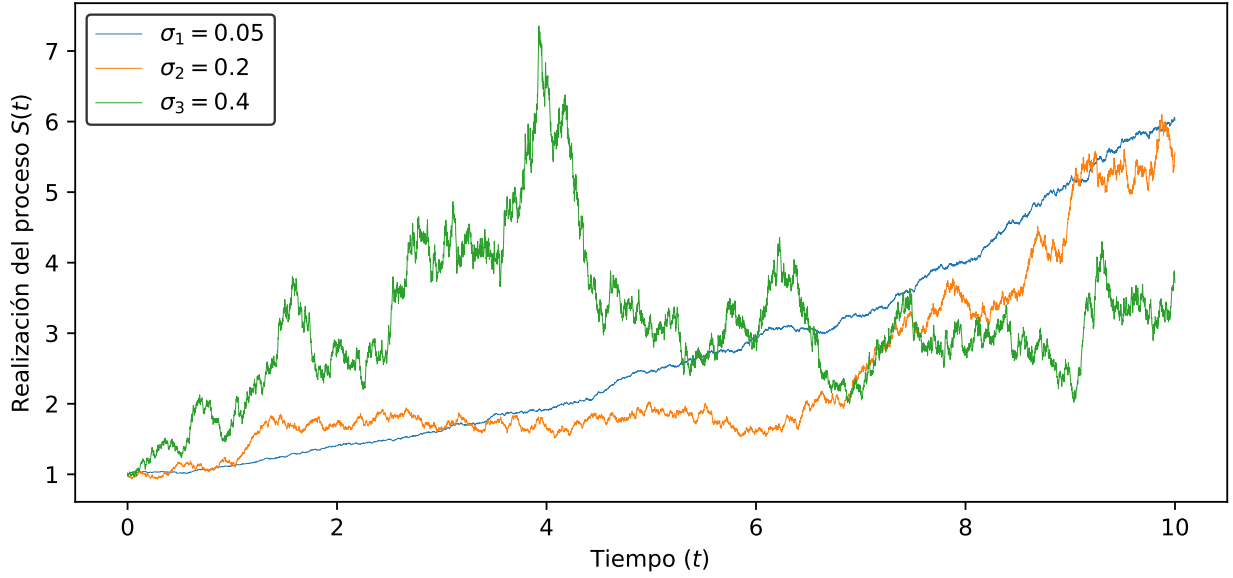
**Ejemplo 4.2** (Precio de una acción). Supongamos que un cierto proceso estocástico  $S(\cdot)$  tiene la EDE unidimensional  $dS = \mu S dt + \sigma S dW$ , con  $\mu$  y  $\sigma$  constantes, y dato inicial  $S(0) = s_0$ . Por el Lema de Itô,  $u(S(t)) = \log S$  tiene la diferencial estocástica

$$d(\log S) = \frac{dS}{S} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S^2}{S^2} dW = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW,$$

y por tanto, tenemos que la solución a la EDE anterior es el proceso

$$S(t) = s_0 e^{\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t)}.$$

A cada tiempo  $t$ , es una variable aleatoria con distribución log-normal. La Figura 3 muestra una trayectoria  $S(t)$  cuando  $\mu = 0,15$  para  $\sigma_1 = 0,05$ ,  $\sigma_2 = 0,2$ ,  $\sigma_3 = 0,4$ . Obsérvese que el proceso de menor  $\sigma$  es prácticamente exponencial, mientras que en los otros dos dominan las fluctuaciones aleatorias. Notar también la continuidad y no diferenciabilidad de las trayectorias. Se indica un pseudocódigo (Algoritmo 1) que usamos para generar la trayectoria.


 Figura 3: Simulación del proceso  $S(t)$  para distintos valores de  $\sigma$ .

---

**Algoritmo 1:**


---

**Datos:**  $\mu, \sigma, s_0, T, N$  (número de iteraciones)

**Resultado:** Simulación de una trayectoria de  $S(t)$

- 1 Definir  $\Delta t = T/N$  y  $t_k = k\Delta t, k = 0, \dots, N$
  - 2 Tomar  $S(0) = s_0$
  - 3 **for**  $k = 1, \dots, N$  **do**
  - 4     Generar  $W \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$
  - 5     Tomar  $S(t_{k+1}) = S(t_k) \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma W \right]$
  - 6 **end**
- 

## 4.2. Existencia y unicidad de soluciones

**Teorema 4.3.** Supongamos que  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{B}$  son continuas, Lipschitz continuas en la variable  $x$  y tales que

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}(x, t)| &\leq L(1 + |x|), \\ |\mathbf{B}(x, t)| &\leq L(1 + |x|) \end{aligned} \quad \forall 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n,$$

para cierta constante  $L$ .

Sea  $\mathbf{X}_0$  variable aleatoria  $n$ -dimensional tal que

$$\begin{aligned} E(|\mathbf{X}_0|^2) &< \infty \\ \mathbf{X}_0 &\text{ es independiente de } \mathcal{W}^+(0), \end{aligned}$$

con  $\mathbf{W}(\cdot)$  un movimiento browniano  $m$ -dimensional. Entonces, existe una única solución  $\mathbf{X} \in \mathbb{L}_n^2(0, T)$  de la EDE (42).

*Demostración.* 1) **Unicidad.** Supongamos que  $\mathbf{X}$  y  $\hat{\mathbf{X}}$  son soluciones de la EDE. Para  $0 \leq t \leq T$  se tiene que

$$\mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t) = \int_0^t (\mathbf{b}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{b}(\hat{\mathbf{X}}, s)) ds + \int_0^t (\mathbf{B}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{B}(\hat{\mathbf{X}}, s)) d\mathbf{W}.$$



Como  $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ , podemos estimar

$$E(|\mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t)|^2) \leq 2E\left(\left|\int_0^t (\mathbf{b}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{b}(\hat{\mathbf{X}}, s))ds\right|^2\right) + 2E\left(\left|\int_0^t (\mathbf{B}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{B}(\hat{\mathbf{X}}, s))d\mathbf{W}\right|^2\right).$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que  $|\int_0^t \mathbf{f}ds|^2 \leq t \int_0^t |\mathbf{f}|^2 ds$ , para  $t > 0$  y  $\mathbf{f} : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Usando esto, tenemos

$$E\left(\left|\int_0^t (\mathbf{b}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{b}(\hat{\mathbf{X}}, s))ds\right|^2\right) \leq TE\left(\int_0^t |\mathbf{b}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{b}(\hat{\mathbf{X}}, s)|^2 ds\right) \leq L^2 T \int_0^t E(|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}|^2) ds.$$

Además,

$$E\left(\left|\int_0^t (\mathbf{B}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{B}(\hat{\mathbf{X}}, s))d\mathbf{W}\right|^2\right) = E\left(\int_0^t |\mathbf{B}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{B}(\hat{\mathbf{X}}, s)|^2 ds\right) \leq L^2 \int_0^t E(|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}|^2) ds.$$

De este modo, para una cierta constante  $C$ , tendremos

$$E(|\mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t)|^2) \leq C \int_0^t E(|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}|) ds.$$

Aplicando el Lema de Gronwall a  $\phi(t) = E(|\mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}|^2)$ , como  $\phi(t) \leq C \int_0^t \phi(s) ds$ ,  $0 \leq t \leq T$ , resulta que  $\phi \equiv 0$ . Luego  $\mathbf{X}(t) = \hat{\mathbf{X}}(t)$  casi seguro para  $0 \leq t \leq T$ , y así  $\mathbf{X}(r) = \hat{\mathbf{X}}(r)$  para todo racional  $0 \leq r \leq T$ , excepto para un conjunto de probabilidad cero. Como  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  tienen trayectorias continuas ctp.,

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t)|\right) = 0.$$

II) **Existencia.** Sea

$$\begin{cases} \mathbf{X}^0(t) := \mathbf{X}_0, \\ \mathbf{X}^{k+1}(t) := \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^k(s), s)ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^k(s), s)d\mathbf{W}, \end{cases}$$

para  $k = 0, 1, \dots$  y  $0 \leq t \leq T$ . Definamos también

$$d^k(t) := E(|\mathbf{X}^{k+1}(t) - \mathbf{X}^k(t)|^2).$$

Afirmamos que

$$d^k(t) \leq \frac{(Mt)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad k = 0, \dots; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (43)$$

para cierta cte.  $M$ , que depende de  $L, T$  y  $\mathbf{X}_0$ . En efecto, para  $k = 0$ ,

$$\begin{aligned} d^0(t) &= E(|\mathbf{X}^1(t) - \mathbf{X}^0(t)|^2) = E\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}_0, s)ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}_0, s)d\mathbf{W}\right|^2\right) \leq \\ &\leq tE\left(\int_0^t |\mathbf{b}(\mathbf{X}_0, s)|^2 ds\right) + E\left(\int_0^t |\mathbf{B}(\mathbf{X}_0, s)|^2 ds\right) \leq 2(1+t)L^2E\left(\int_0^t (1 + |\mathbf{X}_0|^2)ds\right) \leq tM \end{aligned}$$

para cierta constante  $M$ . Si (43) es cierta para  $k - 1$ , entonces

$$\begin{aligned} d^k(t) &= E \left( \left| \int_0^t (\mathbf{b}(\mathbf{X}^k, s) - \mathbf{b}(\mathbf{X}^{k-1}, s)) ds + \int_0^t (\mathbf{B}(\mathbf{X}^k, s) - \mathbf{B}(\mathbf{X}^{k-1}, s)) d\mathbf{W} \right|^2 \right) \leq \\ &\leq 2TL^2 E \left( \int_0^t |\mathbf{X}^k - \mathbf{X}^{k-1}|^2 ds \right) + 2L^2 E \left( \int_0^t |\mathbf{X}^k - \mathbf{X}^{k-1}|^2 ds \right) \leq \\ &\leq 2L^2(1+T) \int_0^t \frac{M^k s^k}{k!} ds \leq \frac{M^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

habiendo tomado  $M \geq 2L^2(1+T)$ . Esto prueba (43) para  $k \in \mathbb{N}$ .

III) Tenemos que

$$\max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{X}^{k+1}(t) - \mathbf{X}^k(t)|^2 \leq 2TL^2 \int_0^T |\mathbf{X}^k - \mathbf{X}^{k-1}|^2 ds + 2 \max_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^k, s) - \mathbf{B}(\mathbf{X}^{k-1}, s) d\mathbf{W} \right|^2$$

Entonces, es posible aplicar una *desigualdad martingala* (para más información sobre los procesos estocásticos denominados *martingalas* y las desigualdades asociadas a ellas, ver [4], Cap. 2), implicando que

$$\begin{aligned} E \left( \max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{X}^{k+1}(t) - \mathbf{X}^k(t)|^2 \right) &\leq 2TL^2 \int_0^T E(|\mathbf{X}^k - \mathbf{X}^{k-1}|^2) ds + \\ &+ 8L^2 \int_0^T E(|\mathbf{X}^k - \mathbf{X}^{k-1}|^2) ds \leq C \frac{(MT)^k}{k!}, \end{aligned}$$

por el resultado para  $d^k(t)$ . Ahora, recordemos que la desigualdad de Chebyshev aseguraba que  $P(|\mathbf{Y}| > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} E(|\mathbf{Y}|^p)$ , para todo  $\lambda > 0$ ,  $1 \leq p < \infty$ , y toda variable aleatoria  $\mathbf{Y}$ . Entonces,

$$P \left( \max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{X}^{k+1}(t) - \mathbf{X}^k(t)| > \frac{1}{2^k} \right) \leq 2^{2k} E \left( \max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{X}^{k+1}(t) - \mathbf{X}^k(t)|^2 \right) \leq 2^{2k} \frac{C(MT)^k}{k!},$$

El siguiente paso es aplicar el lema de Borel-Cantelli, que afirma que si  $A_k, k = 1, \dots$  son eventos del espacio de probabilidad y  $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$ , entonces  $P(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k) = 0$ . En nuestro caso, vemos que  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} \frac{C(MT)^k}{k!} < \infty$ , y por lo tanto,

$$P \left( \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{X}^{k+1}(t) - \mathbf{X}^k(t)| > \frac{1}{2^k} \right\} \right) = 0.$$

A tenor de lo anterior, para casi todo  $\omega$ ,  $\mathbf{X}^k = \mathbf{X}^0 + \sum_{j=0}^{k-1} (\mathbf{X}^{j+1} - \mathbf{X}^j)$  converge uniformemente en  $[0, T]$  a un cierto proceso  $\mathbf{X}(\cdot)$ . Tomando límites en la definición de  $\mathbf{X}^{k+1}(\cdot)$ , probamos entonces que

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}, s) ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}, s) d\mathbf{W}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

con lo que  $\mathbf{X}$  es solución de la EDE (42).

iv) El último paso es probar que  $\mathbf{X}(\cdot) \in \mathbb{L}_n^2(0, T)$ . Se tiene

$$\begin{aligned} E(|\mathbf{X}^{k+1}(t)|^2) &\leq CE(|\mathbf{X}_0|^2) + CE\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^k, s)ds\right|^2\right) + CE\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^k, s)d\mathbf{W}\right|^2\right) \leq \\ &\leq C(1 + E(|\mathbf{X}_0|^2)) + C \int_0^t E(|\mathbf{X}^k|^2)ds, \end{aligned}$$

donde, como de costumbre,  $C$  denota a varias constantes positivas. Por inducción se deduce que

$$E(|\mathbf{X}^{k+1}(t)|^2) \leq \left(C + C^2 + \dots + C^{k+2} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right) (1 + E(|\mathbf{X}_0|^2)),$$

de donde  $E(|\mathbf{X}^{k+1}(t)|^2) \leq C(1 + E(|\mathbf{X}_0|^2))e^{Ct}$ . Tomando límite en  $k$ , se tiene finalmente que

$$E(|\mathbf{X}(t)|^2) \leq C(1 + E(|\mathbf{X}_0|^2))e^{Ct}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

y por tanto,  $\mathbf{X} \in \mathbb{L}_n^2(0, T)$ .  $\square$

### 4.3. Propiedades de la solución

En este apartado se establecen brevemente algunas propiedades de las soluciones de una EDE.

**Teorema 4.4.** *En las hipótesis del Teorema de Existencia y Unicidad (Teorema 4.3), si existe un entero positivo  $p$  tal que  $E(|\mathbf{X}_0|^{2p}) < \infty$ , entonces la solución a la EDE (4.2) dada en el Corolario anterior cumple que*

$$\begin{aligned} E(|\mathbf{X}(t)|^{2p}) &\leq C_2(1 + E(|\mathbf{X}_0|^p))e^{C_1 t} \\ E(|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_0|^{2p}) &\leq C_2(1 + E(|\mathbf{X}_0|^p))t^p e^{C_2 t} \end{aligned}$$

En particular si  $E(|\mathbf{X}_0|^{2p}) < \infty$ , para todo entero  $1 \leq p < \infty$ , entonces  $\mathbf{X}(\cdot)$  es en ctp. Hölder continua en  $[0, T]$  con exponente  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ .

La última afirmación viene de que, en tal caso, el Teorema de Kolmogorov 2.9 es cierto para  $\beta = 2p$ ,  $\alpha = 1 + \alpha$ , con lo que  $\mathbf{X}(\cdot)$  es en ctp. Hölder continua en  $[0, T]$  con exponente  $0 < \gamma < \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$ ,  $p \in \mathbb{N}^+$ .

**Teorema 4.5.** *Sea  $\mathbf{b}^k$ ,  $\mathbf{B}^k$ ,  $\mathbf{x}_0^k$ ,  $k = 1, \dots$  satisfaciendo las hipótesis del Teorema 4.3. Supongamos que*

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E(|\mathbf{X}_0^k - \mathbf{X}_0|^2) &= 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ |x| \leq M}} (|\mathbf{b}^k(x, t) - \mathbf{b}(x, t)| + |\mathbf{B}^k(x, t) - \mathbf{B}(x, t)|) &= 0, \end{aligned}$$

para cada  $M > 0$ . Si  $\mathbf{X}^k(\cdot)$  es solución de

$$\begin{cases} d\mathbf{X}^k = \mathbf{b}^k(\mathbf{X}^k, t)dt + \mathbf{B}^k(\mathbf{X}^k, t)d\mathbf{W} & (\text{sin suma en } k) \\ \mathbf{X}^k(0) = \mathbf{X}_0^k, \end{cases}$$

entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\left(\max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{X}^k(t) - \mathbf{X}(t)|^2\right) = 0,$$

con  $\mathbf{X}$  la solución de la EDE (4.2).

El teorema anterior afirma que  $\mathbf{X}^k(\cdot)$  converge uniformemente en  $L^2(\Omega)$  a  $\mathbf{X}(\cdot)$ .

**Ejemplo 4.6.** Para todo  $\omega \in \Omega$  salvo un conjunto de probabilidad cero, las trayectorias del proceso estocástico  $\mathbf{X}^\epsilon$  solución de

$$\begin{cases} d\mathbf{X}^\epsilon = \mathbf{b}(\mathbf{X}^\epsilon)dt + \epsilon d\mathbf{W}, \\ \mathbf{X}^\epsilon = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

convergen uniformemente en  $[0, T]$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  a la trayectoria determinista de

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))dt, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

lo que ilustra la consistencia de las EDEs con las EDOs, una vez que prescindimos del término estocástico y asumimos condiciones iniciales deterministas.

#### 4.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales

**Definición 4.7.** La ecuación diferencial estocástica

$$d\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)d\mathbf{W}$$

se dice *lineal* cuando

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(x, t) &:= \mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)x; \quad \mathbf{c} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{D} : [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^{n \times n}, \\ \mathbf{B}(x, t) &:= \mathbf{E}(t) + \mathbf{F}(t)x; \quad \mathbf{E} : [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^{n \times m}, \quad \mathbf{F} : [0, T] \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{M}^{n \times m}), \end{aligned}$$

siendo  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{M}^{n \times m})$  el conjunto de aplicaciones lineales acotadas de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{M}^{n \times m}$ .

Si además  $\mathbf{c} \equiv \mathbf{E} \equiv 0$  en  $0 \leq t \leq T$ , se dice *homogénea*.

Si  $\mathbf{F} \equiv 0$ , se dice *lineal en sentido estricto*.

En virtud de esta definición, escribimos la EDE lineal como

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = (\mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{X})dt + (\mathbf{E}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{X})d\mathbf{W}, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0. \end{cases}$$

Por componentes, esto significa

$$\begin{cases} dX^i = (c^i(t) + d^{ij}(t)X^j)dt + (E^{il}(t) + F^{ij,l}(t)X^j)dW^l, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad l = 1, \dots, m, \\ X^i(0) = X_0^i, \end{cases}$$

y con esta notación, podemos escribir

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = (\mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{X})dt + (\mathbf{E}^l(t) + \mathbf{F}^l(t)\mathbf{X})dW^l, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0. \end{cases} \quad (44)$$

Nótese que  $\mathbf{E}^l \in \mathbb{R}^n$  y que  $\mathbf{F}^l \in \mathbb{M}^{n \times n}$ ,  $l = 1, \dots, m$ .

**Teorema 4.8.** *La solución de la ecuación diferencial estocástica lineal (44) viene dada por*

$$\mathbf{X} = \Phi(t) \left( \mathbf{X}_0 + \int_0^t \Phi(s)^{-1} (\mathbf{c}(s) - \mathbf{F}^l(s) \mathbf{E}^l(s)) ds + \mathbf{E}^l(s) dW^l \right),$$

donde  $\Phi(t) \in \mathbb{M}^{n \times n}$  es la matriz fundamental de la correspondiente EDE lineal homogénea, i.e. la solución de

$$\begin{cases} d\Phi = \mathbf{D}(t)\Phi dt + \mathbf{F}^l(t)\Phi dW^l, \\ \Phi(0) = I, \end{cases} \quad (45)$$

*Demostración.* Denotamos  $d\mathbf{Y} := (\mathbf{c}(s) - \mathbf{F}^l(s) \mathbf{E}^l(s)) ds + \mathbf{E}^l(s) dW^l$ , y sea  $\mathbf{Z} := \mathbf{X}_0 + \int_0^t \Phi(s)^{-1} d\mathbf{Y}$ . Entonces, como  $d\mathbf{Z} = \Phi(t)^{-1} d\mathbf{Y}$ , por la regla de la cadena de Itô,

$$\begin{aligned} d(\Phi(t)\mathbf{Z}(t)) &= \Phi(t)d\mathbf{Z} + \mathbf{Z}(t)d\Phi + \mathbf{F}^l(t)\Phi(t)\mathbf{Z}(t)^{-1}\mathbf{E}^l(t) = \\ &= d\mathbf{Y} + \mathbf{D}(t)\mathbf{X}dt + \mathbf{F}^l(t)\mathbf{X}dW^l + \mathbf{F}^l(t)\mathbf{E}^l(t)dt = \\ &= (\mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{X})dt + (\mathbf{E}^l(t) + \mathbf{F}^l(t)\mathbf{X})dW^l. \end{aligned}$$

Por unicidad,  $\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{Z}(t)$  ctp., y por tanto, esta es la solución de la ecuación (44).  $\square$

En el caso escalar, i.e.  $n = 1$ , (45) se puede resolver explícitamente, resultando

$$\Phi(t) = \exp \int_0^t (D - \frac{1}{2} F^l F^l) ds + \int_0^t F^l dW^l.$$

**Corolario 4.9.** *La solución a la EDE (44) cuando  $\mathbf{F} \equiv 0$  y  $\mathbf{D}(t) \equiv \mathbf{D} \equiv \text{cte}$  viene dada por*

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{D}t} \mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{D}(t-s)} (\mathbf{c}(s) ds + \mathbf{E}^l dW^l).$$

Esto se debe a que la solución a (45) en este caso es  $\Phi = e^{\mathbf{D}t}$ .

A continuación estudiamos con más detalle las EDE lineales en sentido estricto, i.e. el caso  $\mathbf{F} \equiv 0$ , pero con  $\mathbf{D}(\cdot)$  no necesariamente constante.

**Corolario 4.10.** *La solución a la EDE (44) cuando  $\mathbf{F} \equiv 0$  viene dada por*

$$\mathbf{X} = \Phi(t) \left( \mathbf{X}_0 + \int_0^t \Phi(s)^{-1} (\mathbf{c}(s) ds + \mathbf{E}(s) d\mathbf{W}) \right), \quad (46)$$

donde  $\Phi(t)$  es solución de la EDO

$$\begin{cases} d\Phi = \mathbf{D}(t)\Phi dt, \\ \Phi(0) = I, \end{cases}$$

El teorema que resume las propiedades más importantes de estas ecuaciones es el que sigue:

**Teorema 4.11.** *La solución  $\mathbf{X}(\cdot)$  de la EDE (44), cuando  $\mathbf{F} \equiv 0$ , satisface que*

a)  $m := E(\mathbf{X}) = \Phi(t) \left( E(\mathbf{X}_0) + \int_0^t \Phi(s)^{-1} \mathbf{c}(s) ds \right)$ , luego  $\dot{m}$  es la solución de la EDO

$$\dot{m} = \mathbf{D}(t)m + \mathbf{c}(t), \quad m(0) = E(\mathbf{X}_0),$$

b) la matriz de covarianzas dada por  $\mathbf{L}(s, t) := E((\mathbf{X}(s) - E(\mathbf{X}(s)))(\mathbf{X}(t) - E(\mathbf{X}(t)))^T)$  es

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(s, t) = & \Phi(s) \left( E(\mathbf{X}_0 - E(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X}_0 - E(\mathbf{X}_0))^T) + \right. \\ & \left. + \int_0^{t \wedge s} \Phi(r)^{-1} \mathbf{E}(r) \mathbf{E}(r)^T (\Phi(r)^{-1})^T dr \right) \Phi(t)^T. \end{aligned}$$

En particular,  $\mathbf{L}(t) := \mathbf{L}(t, t)$  es la solución de la EDO

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{L}(t) + \mathbf{L}(t)\mathbf{D}(t)^T + \mathbf{E}(t)\mathbf{E}(t)^T, \quad \mathbf{L}(0) = E((\mathbf{X}_0 - E(\mathbf{X}_0))(\mathbf{X}_0 - E(\mathbf{X}_0))^T).$$

c)  $\mathbf{X}(\cdot)$  sigue una distribución normal si y solo si  $\mathbf{X}_0$  es normal.

*Demostración.* a) La primera parte de (a) es evidente por la linealidad de la esperanza y por la propiedad (b) del Teorema 3.10. La segunda parte se obtiene directamente de la primera derivando respecto de  $t$  y notando que  $\dot{\Phi} = \mathbf{D}(t)\Phi(t)$ .

b) Para la primera parte, se tiene en cuenta que  $\mathbf{X}(t) - E(\mathbf{X}(t)) = \Phi(t)(\mathbf{X}_0 - E(\mathbf{X}_0) + \int_0^t \Phi(s)^{-1} \mathbf{E}(s) d\mathbf{W})$ , que  $\mathbf{X}_0$  es independiente de  $\int_0^t \Phi(s)^{-1} \mathbf{E}(s) d\mathbf{W}$ , y el Corolario 3.12. La EDO se obtiene de forma análoga a (a).

c) Sea  $\mathbf{X} = \Phi(t)(\mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)$ , con  $\mathbf{Y}_2 := \int_0^t \Phi(s)^{-1} \mathbf{c}(s) ds$ , y  $\mathbf{Y}_3 = \int_0^t \mathbf{G}(s) d\mathbf{W}$ , con  $\mathbf{G}(s) = \Phi^{-1}(s) \mathbf{E}(s)$ . Veamos que  $\mathbf{Y}_3$  sigue una distribución normal. En efecto, como  $\mathbf{G}(\cdot)$  no depende de  $\omega$ , podemos tomar una sucesión de funciones escalonadas independientes de  $\omega$  tales que  $\int_0^t \mathbf{G} d\mathbf{W} := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{G}^n d\mathbf{W}$ . Por incrementos independientes y teniendo en cuenta que  $\mathbf{G}^n(t)$  es una función escalonada independiente de  $\mathbf{W}$ , se tiene que

$$\int_0^t \mathbf{G}^n d\mathbf{W} = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{G}^n(t_k) (\mathbf{W}(t_{k+1}) - \mathbf{W}(t_k)) \sim \mathcal{N} \left( 0, \int_0^t \mathbf{G}^n \mathbf{G}^{nT} ds \right).$$

Entonces, tomando límite en lo anterior, resulta que  $\int_0^t \mathbf{G} d\mathbf{W} \sim N \left( 0, \int_0^t \mathbf{G} \mathbf{G}^T ds \right)$ . Además  $\mathbf{Y}_2$  es independiente de  $\omega$ , luego  $\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3$  sigue una normal. Por lo tanto, como  $\mathbf{X}_0$  es independiente de  $\mathbf{Y}_1$  e  $\mathbf{Y}_2$ , resulta que  $\mathbf{X}$  es normal si y solo si  $\mathbf{X}_0$  lo es.  $\square$

## Parte III

# Filtro de Kalman-Bucy

## 5. Filtro de Kalman-Bucy

En una inmensa cantidad de situaciones, los sistemas dinámicos se modelizan en un principio mediante procesos (digamos  $\mathbf{X}(\cdot)$ ) que cumplen EDEs fijadas de antemano, pero ¿y si disponemos de una observación  $\mathbf{Z}(\cdot)$  sobre la evolución de nuestro sistema? Entonces podríamos tenerla en cuenta para construir un proceso  $\hat{\mathbf{X}}(\cdot)$  que aproxime adecuadamente a  $\mathbf{X}(\cdot)$ . El filtro de Kalman-Bucy proporciona un algoritmo que trata esta cuestión de forma sencilla y elegante, como veremos en esta Parte.

### 5.1. Definiciones y resultados preliminares

Hasta ahora hemos considerado como movimiento browniano el dado en las definiciones 2.1 y 2.2. A este proceso se conoce como *proceso de Wiener estándar*, para distinguirlo de una clase más general de procesos, que se define a continuación.

**Definición 5.1.** Un proceso estocástico en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{W}(\cdot) = (W^1(\cdot), \dots, W^n(\cdot))$  es un *proceso de Wiener  $n$ -dimensional general* si sigue una distribución normal, y

$$E(\mathbf{W}(t)) = 0, \quad E(\mathbf{W}(s)\mathbf{W}^T(t)) = \int_0^s \mathbf{B}(u)du, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (47)$$

donde la matriz  $\mathbf{B}(\cdot)$  satisface que

- I)  $\mathbf{B}(\cdot)$  es continua en  $[0, T]$ .
- II)  $\mathbf{B}(u)$  es simétrica para todo  $u \in [0, T]$ .
- III)  $\mathbf{B}(u) \geq 0$  para todo  $u \in [0, T]$ , i.e.  $\mathbf{x}^T \mathbf{B}(u) \mathbf{x} \geq 0$ , para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 5.2.** Sea  $\mathbf{W}^0(\cdot)$  proceso de Wiener estándar  $n$ -dimensional. Entonces, un proceso  $\mathbf{W}(\cdot)$  es proceso de Wiener general  $n$ -dimensional si y solo si existe  $\mathbf{Q} : [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^{n \times n}$  continua tal que

$$\mathbf{W}(t) = \int_0^t \mathbf{Q}(u) d\mathbf{W}^0(u), \quad t \in [0, T].$$

El resultado anterior da una construcción de un proceso de Wiener general a partir de uno estándar que, de hecho, caracteriza a los procesos de Wiener generales. En adelante, llamaremos al proceso de Wiener general simplemente proceso de Wiener, siempre que no haya peligro de confusión. En la práctica, satisfacen casi siempre las mismas propiedades que los procesos de Wiener estándar, modificadas a veces al tener en cuenta la segunda propiedad de (47). Mencionamos este resultado, que se prueba en el Teorema 2.35 de [8].

**Teorema 5.3.** Sean  $\mathbf{F}, \mathbf{G} : [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^{n \times n}$  continuas. Entonces, si  $0 \leq s \leq t \leq T$ ,

$$E \left( \int_0^s \mathbf{F}(u) d\mathbf{W}(u) \left( \int_0^t \mathbf{G}(v) d\mathbf{W}(v) \right)^T \right) = \int_0^s \mathbf{F}(u) \mathbf{B}(u) \mathbf{G}^T(u) du.$$

**Definición 5.4.** Sea  $\mathbf{X}(\cdot)$  un proceso estocástico  $n$ -dimensional. Se llama *parte determinista* de  $\mathbf{X}(\cdot)$  a su esperanza, i.e. a  $E(\mathbf{X})$ . Su *parte estocástica* es

$$\mathbf{X}_e(t) = \mathbf{X}(t) - E(\mathbf{X}(t)), \quad t \in [0, T].$$

Denotaremos a la adherencia o clausura de un conjunto  $A$  como  $\text{cl}(A)$ .

**Definición 5.5.** Sea un sistema dinámico descrito por la EDE lineal en sentido estricto

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = (\mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{X})dt + d\mathbf{W}, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0. \end{cases} \quad (48)$$

Sea una *observación parcial acumulativa* dada por

$$\mathbf{Z}(s) = \int_0^s \mathbf{H}(u)\mathbf{X}(u)du + \mathbf{W}^*(s), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (49)$$

con  $\mathbf{H} \in \mathbb{M}^{m \times n}$  continua, y  $\mathbf{W}^*(\cdot)$  un proceso de Wiener  $m$ -dimensional, independiente de  $\mathbf{W}(\cdot)$ . Sea  $\mathbf{X}_e, \mathbf{Z}_e$  la parte estocástica de  $\mathbf{X}, \mathbf{Z}$ , respectivamente. Denotamos por  $H(\mathbf{Z}_e, t)$  a la adherencia en  $L^2(\Omega)$  de la envoltura lineal de  $Z_{e,j}(s)$ , para todo  $j = 1, \dots, m$  y todo  $s \in [0, t]$ , es decir

$$H(\mathbf{Z}_e, t) := \text{cl} \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j Z_{e,j}(s) : \lambda_j \in \mathbb{R}, s \in [0, t] \right\} \subset L^2(\Omega)$$

Definimos el *estimador de Kalman-Bucy* como el proceso  $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n)$ , con  $\hat{X}_i$  satisfaciendo que

$$E((X_{e,i} - \hat{X}_i)^2) = \min_{\Upsilon \in H(\mathbf{Z}_e, t)} E((X_{e,i} - \Upsilon)^2), \quad i = 1, \dots, n. \quad (50)$$

Hablando informalmente, el estimador de Kalman-Bucy es el proceso más parecido al sistema original  $\mathbf{X}_e$  que podemos construir a partir de la observación parcial  $\mathbf{Z}_e$ . Es muy importante notar que, añadiéndole a  $\hat{\mathbf{X}}(\cdot)$  la parte determinista de  $\mathbf{X}(\cdot)$ , i.e.  $\hat{\mathbf{X}}(t) + E(\mathbf{X}(t))$ , obtenemos la mejor aproximación (en el sentido de mínimos cuadrados) de  $\mathbf{X}$  que es compatible con las observaciones parciales acumulativas. Esto es lo que se hará en el ejemplo que presentaremos en el apartado 5.4.

Usando una generalización del Corolario 3.12 y del Corolario 4.10 para procesos de Wiener generales, se puede demostrar este teorema (ver Teorema 3.5 de [8]):

**Teorema 5.6.** La parte estocástica  $\mathbf{X}_e$  de  $\mathbf{X}$  satisface la ecuación integral estocástica

$$\mathbf{X}_e(t) = \mathbf{X}_{e,0} + \int_0^t \mathbf{D}(s)\mathbf{X}_e(s)ds + \mathbf{W}(t), \quad t \in [0, T], \quad (51)$$

con  $\mathbf{X}_{e,0} = \mathbf{X}_0 - E(\mathbf{X}_0)$ . En este caso, la solución es única, y viene dada por

$$\begin{cases} \mathbf{X}_e(t) = \Phi(t) \left( \mathbf{X}_{e,0} + \int_0^t \Phi^{-1}(s)d\mathbf{W}(s) \right), \\ d\Phi(t) = \mathbf{D}(t)\Phi(t)dt, \quad \Phi(0) = I. \end{cases} \quad (52)$$



Además, la matriz de covarianzas  $\mathbf{L}(s, t)$  de  $\mathbf{X}$  se expresa en términos de  $\mathbf{X}_e$  como

$$\mathbf{L}(s, t) = E(\mathbf{X}_e(s)\mathbf{X}_e^T(t)) = \Phi(s) \left( E(\mathbf{X}_{e,0}\mathbf{X}_{e,0}^T) + \int_0^s \Phi^{-1}(u)\mathbf{B}(u)(\Phi^{-1}(u))^T du \right) \Phi^T(t),$$

cuando  $0 \leq s \leq t \leq T$ . Por tanto,  $\mathbf{L}(t, t) := \mathbf{L}(t)$  es solución de la EDO

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{L}(t) + \mathbf{L}(t)\mathbf{D}^T(t) + \mathbf{B}(t), \\ \mathbf{L}(0) = E(\mathbf{X}_{e,0}\mathbf{X}_{e,0}^T). \end{cases} \quad (53)$$

En adelante, prescindimos del subíndice  $e$ , y denotamos  $\mathbf{Z} := \mathbf{Z}_e$ , y  $\mathbf{X} := \mathbf{X}_e$ . El objetivo es, por tanto, describir  $\hat{\mathbf{X}}$  dado por (50). En adelante, vamos a asumir que la matriz  $\mathbf{B}^*(\cdot)$  de  $\mathbf{W}^*$  satisface que

$$\mathbf{B}^*(u) > 0, \quad u \in [0, T],$$

lo que quiere decir que

$$\mathbf{x}^T \mathbf{B}^*(u) \mathbf{x} > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad u \in [0, T].$$

Un teorema realmente difícil de demostrar (véase el Teorema 4.11 de [8]), pero imprescindible en este desarrollo, es el siguiente:

**Teorema 5.7.**  $X \in H(\mathbf{Z}, t)$  si y solo si existe una función  $\mathbf{f} : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} \in L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$  tal que

$$X(t) = \int_0^t \mathbf{f}^T(s) d\mathbf{Z}(s). \quad (54)$$

Además, dado  $X \in H(\mathbf{Z}, t)$ , la función  $\mathbf{f}$  es única.

Dado que la observación  $\mathbf{Z}(s)$  verifica la ecuación estocástica integral (49),  $\mathbf{Z}(s)$  satisface también la EDE

$$d\mathbf{Z}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{X}(s)ds + d\mathbf{W}^*(s),$$

con lo que, en general, expresiones del tipo (54) equivalen a

$$\int_0^t \mathbf{f}^T(s) d\mathbf{Z}(s) := \int_0^t \mathbf{f}^T(s) \mathbf{H}(s) \mathbf{X}(s) ds + \int_0^t \mathbf{f}^T d\mathbf{W}^*(s).$$

El teorema es difícil de probar y no presentaremos la demostración aquí. Es importante señalar, sin embargo, que la caracterización depende en esencia de  $\mathbf{W}^*(\cdot)$ .

Como  $H(\mathbf{Z}, t)$  es un subespacio de  $L^2(\Omega)$ , vemos que  $\hat{X}_i(t)$  es la  $i$ -ésima componente de  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  si y solo si es la proyección ortogonal de  $X_i(t)$  sobre este subespacio.  $\hat{X}_i$  de hecho existe y es único, porque el Teorema de Proyección de Riesz es aplicable, de forma que para cada  $X_i \in L^2(\Omega)$  existe un único elemento  $\hat{X}_i \in H(\mathbf{Z}, t)$  tal que  $X_i - \hat{X}_i$  es ortogonal a  $H(\mathbf{Z}, t)$ , equivalentemente, tal que

$$\min_{\Upsilon \in H(\mathbf{Z}, t)} \|X_i - \Upsilon\|$$

se alcanza en  $\Upsilon = \hat{X}_i$ . Una ilustración de esto se encuentra en la Figura 4 (entresacada de [8]).

Reescribimos lo que hemos comentado en el párrafo anterior de la siguiente manera:

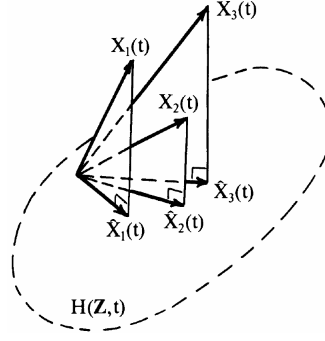


Figura 4: Proyecciones ortogonales de  $X_i(t)$  en  $H(\mathbf{Z}, t)$ .

**Lema 5.8.** I) El estimador de Kalman-Bucy  $\hat{\mathbf{X}}$  es único.

II) Un proceso  $\hat{\mathbf{X}}$  es el estimador de Kalman-Bucy si y solo si

$$\hat{X}_i(t) \in H(\mathbf{Z}, t) \quad (55)$$

$$X_i(t) - \hat{X}_i(t) \in H^\perp(\mathbf{Z}, t), \quad (56)$$

con  $H^\perp$  el complemento ortogonal de  $H(\mathbf{Z}, t)$  en  $L^2(\Omega)$ .

El objetivo de las siguientes secciones es dar caracterizaciones alternativas del estimador de Kalman-Bucy, de forma que podamos calcularlo computacionalmente de forma eficaz.

## 5.2. Primera caracterización

**Teorema 5.9.** Un proceso  $\hat{\mathbf{X}}$  es el estimador de Kalman-Bucy si y solo si

I)  $\hat{\mathbf{X}}$  se puede escribir de la forma

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \int_0^t \mathbf{K}(t, u) d\mathbf{Z}(u), \quad (57)$$

con  $\mathbf{K}(t, u) = (k_{ij}(t, u))$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $k_{ij} \in L^2(\Omega)$ .  $\mathbf{Z}$  es la observación parcial acumulativa dada en (49).

II) Se satisfacen las llamadas ecuaciones de Wiener-Hopf

$$E(\mathbf{X}(t)\mathbf{Z}^T(s)) = E(\hat{\mathbf{X}}(t)\mathbf{Z}^T(s)), \quad 0 \leq s \leq t. \quad (58)$$

*Demostración.* Encontramos condiciones necesarias y suficientes a cada una de las condiciones del Lema 5.8.

I) Por el Teorema 5.7,  $\hat{X}_i(t) \in H(\mathbf{Z}, t)$  si y solo si  $\hat{X}_i(t) = \int_0^t k_{ij}(t, u) dZ_j(u)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , donde  $k_{ij} \in L^2(0, t; \mathbb{R})$ , como función de la variable  $u$ . Por tanto, podemos escribir  $\hat{\mathbf{X}}$  en la forma dada en (57).

II) Es claro que (58) es equivalente a que para cada  $s \in [0, t]$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $X_i(t) - \hat{X}_i(t)$  es ortogonal a  $Z_j(s)$ , es decir,

$$\forall j = 1, \dots, m, \quad s \in [0, t], \quad E((X_i(t) - \hat{X}_i(t))Z_j(s)) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Esta condición implica (56). En efecto,  $X_i(t) - \hat{X}_i(t)$  es ortogonal a cualquier elemento  $U \in H(\mathbf{Z}, t)$ , al existir una sucesión  $U^n$  convergiendo hacia  $U$  en media cuadrática cuyos elementos son combinaciones lineales de  $Z_j(s_k)$ ,  $j = 1, \dots, m$  y  $s_k \in [0, t]$ . Así,  $E((X_i(t) - \hat{X}_i(t))U_n(s)) = 0$ , lo que implica, al tomar límites, que

$$E((X_i(t) - \hat{X}_i(t))U) = 0.$$

La implicación en el otro sentido es evidente.  $\square$

Las ecuaciones de Wiener-Hopf son, a la vista de su expresión,  $n$  sistemas (uno para cada  $\hat{\mathbf{X}}_i$ ) con  $m$  ecuaciones cada una. La fila  $i$ -ésima proporciona el sistema para  $\hat{\mathbf{X}}_i$ . Para más información sobre las ecuaciones de Wiener-Hopf, se puede consultar, por ejemplo el artículo original de N. Wiener y E. Hopf [11], o el libro de B. Noble [7].

**Teorema 5.10.** *Un proceso  $\hat{\mathbf{X}}$  es el estimador de Kalman-Bucy si y solo si  $\mathbf{X}$  se puede escribir de la forma*

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \int_0^t \mathbf{K}(t, u) d\mathbf{Z}(u), \quad (59)$$

con  $\mathbf{K}(t, u) = (k_{ij}(t, u))$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $k_{ij} \in L^2(\Omega)$ , satisfaciendo que

$$\mathbf{K}(t, s) \mathbf{B}^*(s) + \int_0^t \mathbf{K}(t, u) E(\mathbf{R}(u) \mathbf{R}^T(s)) du = E(\mathbf{X}(t) \mathbf{R}^T(s)), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (60)$$

donde  $\mathbf{R}(u) := \mathbf{H}(u) \mathbf{X}(u)$ .

*Demostración.* Partimos de las ecuaciones de Wiener-Hopf (58). Como  $\mathbf{W}^*(\cdot)$  es independiente de  $\mathbf{W}(\cdot)$ , también lo es de  $\mathbf{X}(\cdot)$ . Teniendo en cuenta esto, y que  $\mathbf{Z}(s) = \int_0^s \mathbf{R}(u) du + \mathbf{W}^*(s)$ , el lado izquierdo es

$$E(\mathbf{X}(t) \mathbf{Z}^T(s)) = \int_0^s E(\mathbf{X}(t) \mathbf{R}^T(u)) du.$$

Para el lado derecho de (58), se aproxima  $\mathbf{K}(t, \cdot)$  a partir de funciones (matriciales) escalonadas  $\mathbf{K}_n(t, \cdot)$  en  $[0, t]$ , y operando, se obtiene

$$\begin{aligned} E(\hat{\mathbf{X}}(t) \mathbf{Z}^T(s)) &= E\left(\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{K}_n(t, u) d\mathbf{Z}(u)\right) \mathbf{Z}^T(s)\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{K}_n(t, u) \frac{\partial}{\partial u} E(\mathbf{Z}(u) \mathbf{Z}^T(s)) du = \int_0^t \mathbf{K}(t, u) \frac{\partial}{\partial u} E(\mathbf{Z}(u) \mathbf{Z}^T(s)) du. \end{aligned}$$

La penúltima igualdad usa el Teorema 2.20 de [8]. Por otro lado, es claro que

$$E(\mathbf{Z}(u) \mathbf{Z}^T(s)) = \int_0^u \int_0^s E(\mathbf{R}(v) \mathbf{R}^T(w)) dv dw + \int_0^{u \wedge s} \mathbf{B}^*(v) dv,$$

y derivando obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial u} E(\mathbf{Z}(u) \mathbf{Z}^T(s)) du = \begin{cases} \int_0^s E(\mathbf{R}(u) \mathbf{R}^T(w)) dw + \mathbf{B}^*(u), & 0 \leq u \leq s, \\ \int_0^s E(\mathbf{R}(u) \mathbf{R}^T(w)) dw, & s < u \leq t. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la fórmula anterior y sustituyendo las expresiones halladas, vemos que las ecuaciones de Wiener-Hopf son completamente equivalentes a

$$\int_0^s E(\mathbf{X}(t)\mathbf{R}^T(u))du = \int_0^t \mathbf{K}(t,u) \left( \int_0^s E(\mathbf{R}(u)\mathbf{R}^T(w))dw \right) du + \int_0^s \mathbf{K}(t,u)\mathbf{B}^*(u)du.$$

Por el Teorema de Fubini,

$$\int_0^s \left( \mathbf{K}(t,u)\mathbf{B}^*(u) + \int_0^t \mathbf{K}(t,w)E(\mathbf{R}(w)\mathbf{R}^T(u))dw - E(\mathbf{X}(t)\mathbf{R}^T(u)) \right) du = 0,$$

de forma que se satisface lo requerido.  $\square$

Las ecuaciones integrales anteriores son de *tipo Fredholm*, y tienen solución única, tal y como afirma el siguiente teorema, cuya demostración se puede ver en el Teorema 4.20 de [8].

**Teorema 5.11.** *La ecuación integral (60) tiene solución única  $\mathbf{K}(t,s)$  en  $D = \{(t,s) | 0 \leq s \leq t \leq T\}$ . Además,  $\mathbf{K}(t,s)$  es continua en  $D$ , diferenciable respecto de  $t$ , siendo la derivada parcial  $\partial_t \mathbf{K}(t,s)$  continua en  $D$ , y cumpliendo que*

$$\partial_t \mathbf{K}(t,s)\mathbf{B}^*(s) + \int_0^t \partial_t \mathbf{K}(t,u)E(\mathbf{R}(u)\mathbf{R}^T(s))du = \mathbf{D}(t)E(\mathbf{X}(t)\mathbf{R}^T(s)) - \mathbf{K}(t,t)E(\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^T(s)) \quad (61)$$

---

#### Algoritmo 2:

---

**Datos:**  $\mathbf{D}(t), \mathbf{H}(t), \mathbf{B}^*(t), \mathbf{Z}(t)$

**Resultado:** Estimador de Kalman-Bucy  $\hat{\mathbf{X}}(t)$

- 1 Calcular  $\mathbf{X}(t)$  según (52)
  - 2 Calcular  $\mathbf{K}(t,s)$  según (60)
  - 3 Calcular  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  según (59)
- 

El Algoritmo 2 es ya un primer algoritmo para el filtro de Kalman-Bucy. No obstante, sucede que resolver las ecuaciones de Fredholm para diferentes valores de  $t$  requiere resolver  $m$  sistemas acoplados de  $n$  ecuaciones cada uno, como puede verse tras una pequeña manipulación de (60). Esto es computacionalmente costoso. Un algoritmo más eficiente es entonces necesario.

### 5.3. Segunda caracterización

**Definición 5.12.** Sea  $\bar{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t)$ . Se define la *matriz de error en la covarianza* como

$$\mathbf{P}(t) = E(\bar{\mathbf{X}}(t)\bar{\mathbf{X}}^T(t)).$$

Nótese que, como las componentes de  $\bar{\mathbf{X}}(t)$  son ortogonales a  $H(\mathbf{Z},t)$ , y como  $\hat{\mathbf{X}}(t) \in H(\mathbf{Z},t)$ , tenemos que

$$\mathbf{P}(t) = E(\bar{\mathbf{X}}(t)\mathbf{X}^T(t)). \quad (62)$$

La utilidad de la matriz de error en la covarianza es que determina  $\mathbf{K}(t,t)$ :

**Lema 5.13.** *Se tiene que*

$$\mathbf{K}(t,t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{B}^{*-1}(t)$$

*Demostración.* Multiplicando (62) por  $\mathbf{H}^T(t)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t) &= E(\bar{\mathbf{X}}(t)\mathbf{X}^T(t))\mathbf{H}^T(t) = E((\mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t))\mathbf{R}^T(t)) = \\ &= E(\mathbf{X}(t)\mathbf{R}^T(t)) - E\left(\left(\int_0^t \mathbf{K}(t,s)d\mathbf{Z}(s)\right)\mathbf{R}^T(t)\right). \end{aligned} \quad (63)$$

Teniendo en cuenta que, por independencia,  $E(\mathbf{W}^*(s)\mathbf{R}^T(t)) = 0$ , es

$$\begin{aligned} E\left(\left(\int_0^t \mathbf{K}(t,s)d\mathbf{Z}(s)\right)\mathbf{R}^T(t)\right) &= E\left(\left(\int_0^t \mathbf{K}(t,s)\mathbf{R}(s)ds\right)\mathbf{R}^T(t)\right) + \\ &+ \int_0^t \mathbf{K}(t,s)\frac{\partial}{\partial s}E(\mathbf{W}^*(s)\mathbf{R}^T(t))ds = \int_0^t \mathbf{K}(t,s)E(\mathbf{R}(s)\mathbf{R}^T(t))ds, \end{aligned}$$

por lo que (63) se reescribe como

$$\mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t) + \int_0^t \mathbf{K}(t,s)E(\mathbf{R}(s)\mathbf{R}^T(t))ds = E(\mathbf{X}(t)\mathbf{R}^T(t)).$$

La ecuación de Fredholm tiene solución única, y al comparar con esta expresión deducimos que

$$\mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t) = \mathbf{K}(t,t)\mathbf{B}^*(t),$$

obteniendo el resultado, dado que  $\mathbf{B}^*(t)$  es invertible.  $\square$

**Lema 5.14.** *El estimador de Kalman-Bucy  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  verifica*

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \int_0^t \mathbf{K}(s,s)d\mathbf{Z}(s) + \int_0^t (\mathbf{D}(u) - \mathbf{K}(u,u)\mathbf{H}(u))\hat{\mathbf{X}}(u)du. \quad (64)$$

*Demostración.* Como  $\mathbf{K}(t,s) = \mathbf{K}(s,s) + \int_s^t \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{K}(u,s)du$ ,

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \int_0^t \mathbf{K}(t,s)d\mathbf{Z}(s) = \int_0^t \mathbf{K}(s,s)d\mathbf{Z}(s) + \int_0^t \int_s^t \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{K}(u,s)dud\mathbf{Z}(s).$$

El orden en la integración puede cambiarse para obtener

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \int_0^t \mathbf{K}(t,s)d\mathbf{Z}(s) = \int_0^t \mathbf{K}(s,s)d\mathbf{Z}(s) + \int_0^t \int_0^u \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{K}(u,s)d\mathbf{Z}(s)du. \quad (65)$$

Por otro lado, si tenemos en cuenta que

$$\mathbf{K}(t,t)E(\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^T(s)) = \mathbf{K}(t,t)\mathbf{H}(t)E(\mathbf{X}(t)\mathbf{R}^T(s)),$$

(61) se reescribe como

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{K}(t,s)\mathbf{B}^*(s) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{K}(t,u)E(\mathbf{R}(u)\mathbf{R}^T(s))du = (\mathbf{D}(t) - \mathbf{K}(t,t)\mathbf{H}(t))E(\mathbf{X}(t)\mathbf{R}^T(s)).$$

El lado derecho de esta ecuación es el mismo que el lado derecho de la (60) multiplicado por el término  $(\mathbf{D}(t) - \mathbf{K}(t,t)\mathbf{H}(t))$ . Por la unicidad de soluciones tendremos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{K}(t,s) = (\mathbf{D}(t) - \mathbf{K}(t,t)\mathbf{H}(t))\mathbf{K}(t,s).$$

Esta relación junto con (65), lleva a

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \int_0^t \mathbf{K}(s,s)d\mathbf{Z}(s) + \int_0^t \int_0^u (\mathbf{D}(u) - \mathbf{K}(u,u)\mathbf{H}(u))\mathbf{K}(u,s)d\mathbf{Z}(s)du,$$

que junto con (59) conduce al resultado.  $\square$

Finalmente, con ayuda de los dos lemas previos, caracterizamos  $\hat{\mathbf{X}}$  de una forma mucho más sencilla de obtener en la práctica.

**Teorema 5.15.** *Un proceso  $\hat{\mathbf{X}}$  es el estimador de Kalman-Bucy si y solo si es la solución de la ecuación no lineal de tipo Riccati*

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \int_0^t (\mathbf{D}(t) - \mathbf{P}(s)\mathbf{H}^T(s)\mathbf{B}^{*-1}(s)\mathbf{H}(s))\hat{\mathbf{X}}(s)ds + \int_0^t \mathbf{P}(s)\mathbf{H}^T(s)\mathbf{B}^{*-1}(s)d\mathbf{Z}(s), \quad (66)$$

en  $t \in [0, T]$ , donde  $\mathbf{P}(t)$  es la solución de la ecuación diferencial de Riccati matricial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = \mathbf{B}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{D}^T(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{B}^{*-1}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t), & t \in [0, T] \\ \mathbf{P}(0) = E(\mathbf{X}_0\mathbf{X}_0^T). \end{cases} \quad (67)$$

*Demostración.* Por el Lema 5.14 podemos escribir  $\hat{\mathbf{X}}$  como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}(t) &= \int_0^t \mathbf{K}(s, s)\mathbf{H}(s)\mathbf{X}(s)ds + \int_0^t \mathbf{K}(s, s)d\mathbf{W}^*(s) + \int_0^t (\mathbf{D}(s) - \mathbf{K}(s, s)\mathbf{H}(s))\hat{\mathbf{X}}(s)ds = \\ &= \int_0^t \mathbf{K}(s, s)\mathbf{H}(s)\bar{\mathbf{X}}(s)ds + \int_0^t \mathbf{D}(s)\hat{\mathbf{X}}(s)ds + \int_0^t \mathbf{K}(s, s)d\mathbf{W}^*(s). \end{aligned}$$

Si le restamos esto a la expresión  $\mathbf{X}(t)$ , dada por (51), tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{X}_0 + \int_0^t (\mathbf{D}(s) - \mathbf{K}(s, s)\mathbf{H}(s))\bar{\mathbf{X}}(s)ds + \mathbf{W}(t) - \int_0^t \mathbf{K}(s, s)d\mathbf{W}^*(s) = \\ &= \mathbf{X}_0 + \int_0^t \bar{\mathbf{D}}(s)\bar{\mathbf{X}}(s)ds + \bar{\mathbf{W}}(t), \end{aligned} \quad (68)$$

donde  $\bar{\mathbf{D}}(t) = \mathbf{D}(t) - \mathbf{K}(t, t)\mathbf{H}(t)$ ,  $\bar{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{W}(t) - \int_0^t \mathbf{K}(s, s)d\mathbf{W}^*(s)$ ,  $t \in [0, T]$ .

El siguiente paso es ver que  $\bar{\mathbf{W}}(t)$  es un proceso de Wiener  $n$ -dimensional. Es claro que sigue una distribución normal, por ser suma de procesos independientes con distribuciones normales. También es evidente que  $E(\bar{\mathbf{W}}(t)) = 0$ . Por último,

$$E(\bar{\mathbf{W}}(s)\bar{\mathbf{W}}^T(t)) = \int_0^s \bar{\mathbf{B}}(u)du,$$

con  $\bar{\mathbf{B}}(u) = \mathbf{B}(u) + \mathbf{K}(u, u)\mathbf{B}^*(u)\mathbf{K}^T(u, u)$ ,  $u \in [0, T]$ . Claramente,  $\bar{\mathbf{B}}(u)$  es simétrica y continua. También es semidefinida positiva, pues, si  $\mathbf{x}$  es un elemento de  $\mathbb{R}^n$ , como  $\mathbf{y}(u) = \mathbf{K}^T(u, u)\mathbf{x}$  también lo es, y resulta que

$$\mathbf{x}^T \bar{\mathbf{B}}(u)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{B}(u)\mathbf{x} + \mathbf{y}^T(u)\mathbf{B}^*(u)\mathbf{y}(u) \geq 0.$$

La ecuación integral (68) es la misma que la dada en (51) del Teorema 5.6. Por lo tanto, la matriz de covarianzas de  $\bar{\mathbf{X}}$ , que llamamos  $\mathbf{P}(t)$ , cumple (53), i.e.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = \bar{\mathbf{D}}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\bar{\mathbf{D}}^T(t) + \bar{\mathbf{B}}(t), \\ \mathbf{P}(0) = E(\mathbf{X}_0\mathbf{X}_0^T) \end{cases}$$

Sin más que sustituir por las definiciones de  $\bar{\mathbf{D}}(t)$ ,  $\bar{\mathbf{B}}(t)$ , que dependen de  $\mathbf{K}(t, t)$ , y usando el Lema 5.13, se obtiene directamente (67).

Utilizando el Lema 5.13, la ecuación (64) se puede expresar para  $t \in [0, T]$  como

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \int_0^t (\mathbf{D}(t) - \mathbf{P}(s)\mathbf{H}^T(s)\mathbf{B}^{*-1}(s)\mathbf{H}(s))\hat{\mathbf{X}}(s)ds + \int_0^t \mathbf{P}(s)\mathbf{H}^T(s)\mathbf{B}^{*-1}(s)d\mathbf{Z}(s).$$

Nótese que la solución de esta ecuación es única, porque  $\hat{\mathbf{X}}$  es la única proyección ortogonal de las componentes de  $\mathbf{X}(t)$  en  $\mathbf{H}(\mathbf{Z}, t)$ . Además, la ecuación (67) es una EDO con términos lipschitzianos, y por tanto tiene solución única. Esto completa la demostración del teorema.  $\square$

---

**Algoritmo 3:**


---

**Datos:**  $\mathbf{D}(t), \mathbf{H}(t), \mathbf{B}^*(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{Z}(t)$

**Resultado:** Estimador de Kalman-Bucy  $\hat{\mathbf{X}}(t)$

1 Calcular  $\mathbf{P}(t)$  según (67)

2 Calcular  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  según (66)

---

El Algoritmo 3 muestra como calcular el estimador. En la práctica, si las ecuaciones a resolver no tienen solución analítica fácil,  $\mathbf{P}(t)$  se resuelve numéricamente antes de que el sistema se ponga en marcha, y conforme el sistema evoluciona, el filtro  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  se resuelve numéricamente de forma recursiva, puesto que, de (66),

$$\hat{\mathbf{X}}(t') = \hat{\mathbf{X}}(t) + \int_t^{t'} (\mathbf{D}(s) - \mathbf{P}(s)\mathbf{H}^T(s)\mathbf{B}^{*-1}(s)\mathbf{H}(s))\hat{\mathbf{X}}(s)ds + \int_t^{t'} \mathbf{P}(s)\mathbf{H}^T(s)\mathbf{B}^{*-1}(s)d\mathbf{Z}(s),$$

donde  $\mathbf{Z}(s)$  se sustituye por los datos medidos  $\mathbf{Z}(s, \omega)$ ,  $s \in [0, T]$ ,  $\omega \in \Omega$ .

Este algoritmo es mucho más eficiente que el anterior. Ahora no es necesario obtener explícitamente  $\mathbf{X}(t)$ , y además, la costosa resolución de las ecuaciones de Fredholm es sustituida por la de una ecuación diferencial de tipo Riccati. Lo que si es inevitable en ambos algoritmos es el cálculo de una integral estocástica. Por otro lado, merece la pena observar ahora el Teorema 1.8, y ver la gran similitud que hay entre (25) y (66), y entre (26) y (67). Lo que en el caso determinista eran las matrices  $\mathbf{S}, \mathbf{Q}(t), \mathbf{R}(t)$  que formaban parte del coste que queríamos minimizar, ahora son las inversas de las matrices de covarianza de  $\mathbf{X}_0, \mathbf{W}(t), \mathbf{W}^*(t)$ , y el problema de minimización se interpreta como el problema de encontrar un estimador de mínima varianza de  $\mathbf{X}$ , dada la observación  $\mathbf{Z}$ .

## 5.4. Ejemplo de aplicación

Desarrollamos a continuación un breve ejemplo, que ilustra muy bien el funcionamiento del filtro de Kalman-Bucy. Véase [3], Cap. 11 para la referencia. Supongamos que queremos estimar una variable aleatoria unidimensional  $X$ , cuya media es  $\mu = E(X)$  y su varianza es  $\sigma^2 = V(X)$ . La variable aleatoria  $X$  puede verse como un proceso estocástico constante en el tiempo, i.e.  $X(t) \equiv X$ , y por tanto satisface  $dX(t) = 0$ . Supongamos que tenemos una observación acumulativa que satisface la EDE

$$dZ(s) = Xds + \beta dW(s), \quad Z(0) = 0,$$

con  $\beta > 0$ . La observación es por tanto

$$Z(s) = Xs + \beta W(s). \tag{69}$$

La presencia del Proceso de Wiener aparece para dar cuenta de errores u otras perturbaciones que hay que añadir a la observación. Siguiendo la notación de la anterior sección, tenemos

$c \equiv D \equiv B \equiv 0$ ,  $H \equiv 1$ , y  $B^{*-1} = 1/\beta^2$ , como es fácil de ver a partir de la definición de Proceso de Wiener. Entonces, la ecuación diferencial no lineal de Riccati (67) toma la forma sencilla siguiente:

$$\dot{P}(t) = -\frac{P(t)^2}{\beta^2}, \quad P(0) = \sigma^2,$$

cuya solución es

$$P(t) = \frac{\sigma^2 \beta^2}{\sigma^2 t + \beta^2}.$$

Denotamos  $Z_e(t) := Z(t) - E(Z(t)) = Z(t) - \mu t$ . De este modo, usando (66), el estimador de Kalman-Bucy satisface la EDE

$$d\hat{X}(t) = -\frac{P(t)}{\beta^2} \hat{X}(t) dt + \frac{P(t)}{\beta^2} dZ_e(t) = -\frac{\sigma^2}{\sigma^2 t + \beta^2} \hat{X}(t) dt + \frac{\sigma^2}{\sigma^2 t + \beta^2} dZ_e(t), \quad \hat{X}(0) = 0.$$

Si multiplicamos por  $\frac{\sigma^2 t + \beta^2}{\beta^2}$ , obtenemos la ecuación diferencial estocástica

$$d\left(\frac{\sigma^2 t + \beta^2}{\beta^2} \hat{X}(t)\right) = \frac{\sigma^2}{\beta^2} dZ_e(t), \quad \hat{X}(0) = 0.$$

En consecuencia, el estimador de Kalman-Bucy  $\hat{X}$  viene dado por

$$\hat{X}(t) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 t + \beta^2} Z_e(t). \quad (70)$$

Por último, según el comentario tras la Definición 5.5, y teniendo en cuenta que  $E(X(t)) = E(X) = \mu$ , la adecuada estimación de  $X$ , que denotamos por  $\hat{X}_f$ , es

$$\hat{X}_f(t) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 t + \beta^2} (Z(t) - \mu t) + \mu = \frac{\beta^2 \mu + \sigma^2 Z(t)}{\sigma^2 t + \beta^2}.$$

Nótese que, en este caso, el estimador depende en el instante  $t$  de la observación acumulativa en ese mismo instante  $t$ .

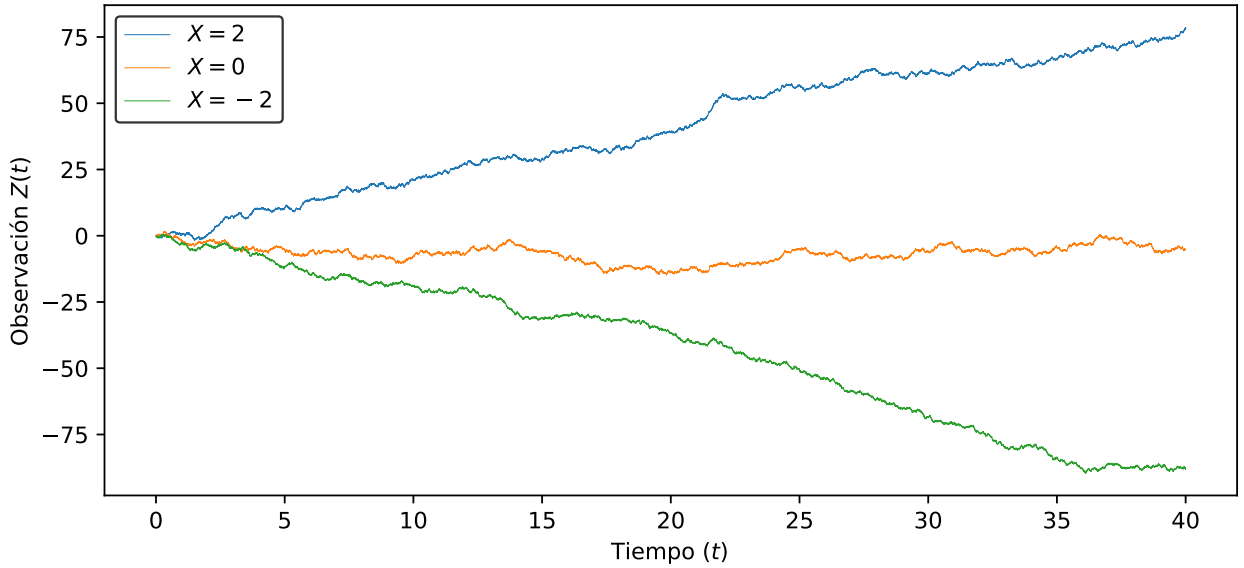
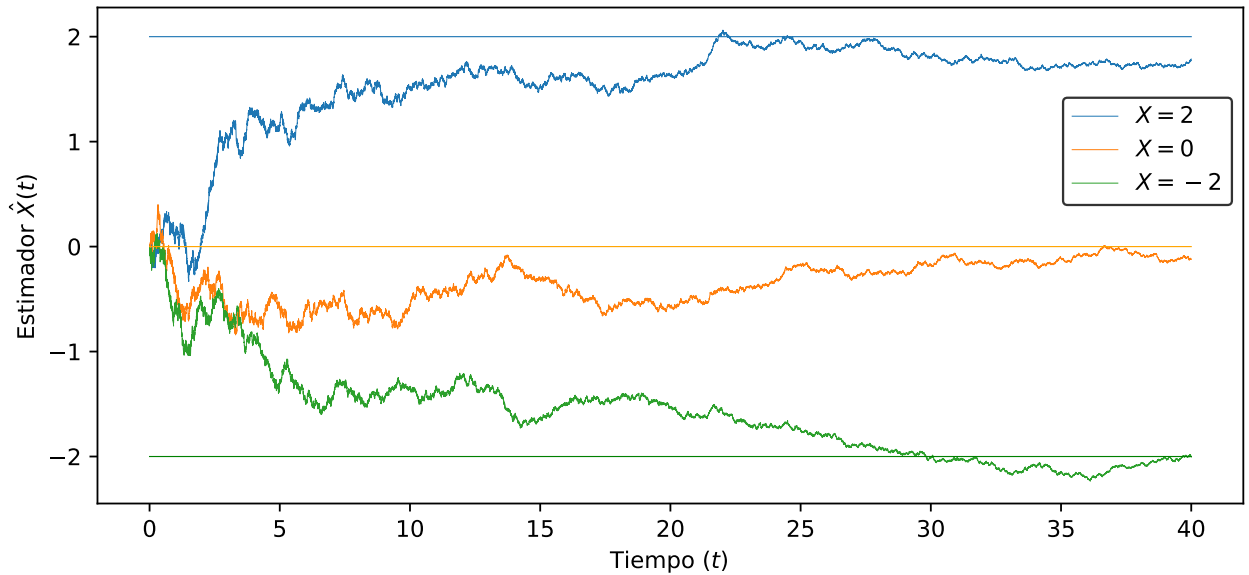
Ilustramos la aplicación del filtro de Kalman-Bucy a este ejemplo. Para ello, tomamos  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$  y  $\beta = 2$ , y suponemos tres realizaciones de la variable aleatoria  $X$ , digamos  $-2, 0$  y  $2$ , que son las que queremos estimar. Para cada una de ellas se simulan las observaciones acumulativas según (69). En la Figura 5 se muestran las trayectorias para cada valor de  $X$ . Posteriormente, para esa observación, se obtienen con (70) las trayectorias para  $\hat{X}_f$ . La Figura 6 muestra claramente el funcionamiento del filtro. Tras un intervalo de tiempo inicial, el filtro  $\hat{X}_f$  ha detectado aproximadamente, a partir de la observación, los correspondientes valores  $X = -2, 0, 2$ . El algoritmo 4 muestra el procedimiento seguido.

Este ejemplo pone de manifiesto que el filtro de Kalman-Bucy puede usarse para obtener variables de carácter aleatorio que puedan observarse en el tiempo. Algunas aplicaciones relevantes van desde la medición de la presión arterial, la estimación del colesterol en sangre, o incluso el cálculo del ritmo cardiaco. El filtro de Kalman-Bucy surge, en definitiva, como un mecanismo viable y efectivo para estimar esas y muchas otras cantidades.



**Algoritmo 4:****Datos:**  $\mu, \sigma, \beta, X$  (realización de  $X$ ),  $N$  (número de iteraciones),  $T$  (tiempo final)**Resultado:** Simulación de una trayectoria de  $Z(t)$  y de  $\hat{X}_f(t)$ 

- 1 Definir  $\Delta t = T/N$  y  $t_k = k\Delta t, k = 0, \dots, N$
- 2 Tomar  $Z(0) = 0$
- 3 **for**  $k = 1, \dots, N$  **do**
- 4     Generar  $W \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$
- 5     Tomar  $Z(t_k) = Z(t_{k-1}) + X\Delta t + \beta W$
- 6     Tomar  $\hat{X}_f(t_k) = (\beta^2\mu + \sigma^2 Z(t_k))/(\sigma^2 t_k + \beta^2)$
- 7 **end**

Figura 5: Trayectorias de las observaciones  $Z(t)$  para  $X = -2, 0, 2$ .Figura 6: Trayectorias del proceso  $X(t)$  para  $X = -2, 0, 2$ , y trayectorias del estimador de Kalman-Bucy  $\hat{X}_f(t)$  para esos valores de  $X$ .

## Referencias

- [1] L. Arnold. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1971.
- [2] R. S. Bucy y P. D. Joseph. *Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance*, Interscience Public. New York. 1968.
- [3] O. Calin. *An Informal Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. World Scientific Publishing, Singapore, 2015.
- [4] L.C. Evans. *An Introduction to Stochastic Differential Equations*, American Mathematical Society, Philadelphia, 2014.
- [5] R. E. Kalman y R. S. Bucy. *New Results in Linear Filtering and Prediction Theory*, Trans. ASME J. Basic Eng. **83**, 95-107, 1961.
- [6] R. E. Kalman, Y. C. Ho, y K. S. Narendra. *Controllability of Linear Dynamical Systems*, Contributions to Differential Equations, Vol. 1, John Wiley, New York, 1963.
- [7] B. Noble. *Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of PDEs*, Pergamon Press, Londres, 1958.
- [8] P. A. Ruymgaart y T. T. Soong. *Mathematics of Kalman-Bucy Filtering*, Springer, Berlin, 1985.
- [9] E. Sontag. *Mathematical Control Theory*. Segunda edición, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [10] E. Trélat. *Contrôle optimal: théorie et applications*. Segunda edición. Vuibert, Collection Mathématiques Concrètes, Paris, 2008.
- [11] N. Wiener and E. Hopf, *Über eine Klasse singularer Integralgleichungen*, S. B. Preuss. Akad. Wiss, 696-706, 1931.